KONİK METRİK UZAYLAR VE BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Muhib ABULOHA

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAZİRAN 2009

ANKARA

Muhib ABULOHA tarafından hazırlanan KONİK METRİK UZAYLAR VE BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ adlı bu tezin Doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU ....
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ ....
Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi
Doç. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU ....
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi
Doç. Dr. Nurhayat İSPİR ....
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi
Doç. Dr. Alev KANIBİR ....
Matematik Anabilim Dalı, Hacettepe Üniversitesi
Yrd. Doç. Dr. Çetin VURAL ....
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Tarih : 11 / 06 / 2009

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Doktora derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Nail ÜNSAL ....
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Muhib ABULOHA

KONİK METRİK UZAYLAR VE BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

(Doktora Tezi)

Muhib ABULOHA

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2009

ÖZET

Bu çalışmada, konik metrik uzay üzerinde bazı temel topolojik yapılar ve tanımlar genelleştirildi. Örneğin, dizisel kapalı küme, sınırlı ve tamamen sınırlı kümeler, $c-$ ağı, Lebesgue elemanı, kompakt küme, sürekli ve dizisel sürekli dönüşümler. Ayrıca, her konik metrik uzayın topolojik uzay, birinci sayılabilir topolojik uzay ve T_4- uzayı olduğu ispatlandı. Konik metrik uzay üzerindeki Baire'nin kategori teoremini ispatlamak için yoğun olmayan, birinci (Meager) ve ikinci (Meager değil) kategoriden tanımlar verildi. Ayrıca, konik normlu uzaylar ve konik Banach uzaylar tanımlandı. İki küme arasındaki uzaklık konik metrik uzay üzerinde tanımlanarak, konik metrik uzaylar üzerinde bazı örnekler verildi. Koniğin kuvvetli minihedral konik olduğu kabul edilerek, bazı sabit nokta teoremleri elde etmek için konik metrik uzaylar üzerindeki çapsal büzülebilir ve asimptotik çapsal büzülebilir dönüşümlerin tanımları verildi.

Sonuç olarak, konik metrik uzay üzerindeki iki nokta arasındaki skaler uzaklığı tanımlayarak genelleştirilmiş büzülme dönüşümleri, bazı sabit nokta teoremleri ve ortak sabit nokta teoremleri elde edildi.

Bilim Kodu : **204.1.132**
Anahtar Kelimeler : **Metrik uzay, konik metrik uzay, konik normlu uzay, konik Banach uzay, sabit nokta, çapsal büzülebilir, asimptotik çapsal büzülebilir ve genelleştirilmiş dönüşümler, minihedral konik, kuvvetli minihedral konik.**
Sayfa adedi : **66**
Tez Yöneticisi : **Doç. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU**

CONE METRIC SPACES AND SOME FIXED POINT THEOREMS

(Ph.D. Thesis)

Muhib ABULOHA

GAZI UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

June 2009

ABSTRACT

In this study, some topological concepts and definitions are generalized to cone metric spaces such as: sequentially closed set, bounded and totally bounded sets, $c-$net for sets, Lebesgue element, compact sets and continuous and sequentially continuous mappings. It is proved that every cone metric space is topological space, first countable topological space and T_4- space. To prove Baire's Category theorem in cone metric spaces, nowhere dense (Rare), Meager (first category) and Nonmeager (second category) sets are defined. Also, cone normed spaces, cone Banach spaces and the distance between two sets in cone metric spaces are defined. Furthermore, accompanied with some examples. To obtain some fixed point theorems in cone metric spaces, by assuming that the cone is a strongly minihedral cone, diametrically contractive and asymptotically diametrically contractive mappings are defined in cone metric spaces.

Finally, some fixed point theorems and common fixed points theorems of generalized contraction mappings are obtained by defining the scalar distance between two points in cone metric spaces.

Science Code **: 204.1.132**
Key Words **: Metric space, cone metric space, cone normed space, cone Banach space, fixed point, diametrically contractive mapping, asymptotical diametrically contractive mapping, generalized contraction mapping, minihedral cone, strongly minihedral cone.**
Page Number **: 66**
Adviser **: Assoc. Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU**

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren, çalışmalarım boyunca, destekleyen ve yönlendiren hocam Doç. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU 'na teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca tez dönemi boyunca bana burs veren TÜBİTAK (Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumu), Tez izleme komitesine, Matematik Bölümü elemanlarına, Filistin ve Türkiye halkına, tezin yazımında yardımcı olan Arş. Gör. Mustafa AŞÇI ya, benden desteğini hiçbir zaman esirgemeyen annem, babam, eşim ve çok sevdiğim çocuklarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
(X, r)	Metrik uzay
$r(x, y)$	Metrik, x ile y arasındaki uzaklık
(X, d)	Konik metrik uzay
$d(x, y)$	Konik metrik, x ile y arasındaki uzaklık
$\sup A$	A nın en küçük üst sınırı (Supremum)
$\max A$	A nın en büyük elemanı (Maksimum)
$\inf A$	A nın en büyük alt sınırı (İnfimum)
f	Boş küme
$\overline{A}$	A kümesinin kapanışı
A^c	A kümesinin tümleyeni
$\{x_n\}$	Dizi
$x_n \to x$	$\{x_n\}$ dizisi x e yakınsar
¥	Doğal sayılar kümesi
¡	Reel sayılar kümesi
$¡_+$	Pozitif reel sayılar kümesi
$\subset$	Alt küme
$\in$	Eleman

Simgeler	**Açıklamalar**
$\notin$	Eleman de ğil
$\ni$	Öyle ki
$\exists$	En az
$\forall$	Her (herhangi)
P	Konik
E	Reel Banach uzay
$\dot{I}çP$	P nin içi
$x \leq y$	$(y-x) \in P$
$x < y$	$x \leq y$ fakat, $x \neq y$
$x << y$	$(y-x) \in \dot{I}çP$
$d\,(A)$	$d\,(A) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}$, (A nın çapı denir)
$d_a(A_n)$	$d_a(A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d\,(A_n)$, ($\{A_n\}$ nın asimptotik çapı denir)
$T : X \to X$	T , X ten X e bir dönüşüm
t_c	Topoloji
(X, t_c)	Topolojik uzay
$\| \cdot \|$	Norm
$(X, \|\cdot\|)$	Normlu uzay
$\| \cdot \|_c$	Konik norm
$(X, \|\cdot\|_c)$	Konik normlu uzay

Simgeler	**Açıklamalar**
$d_c(x,y)$	$\lVert d(x,y) \rVert$
q	Sıfır vektör
$C_{¡}^{m}([a,b])$	$[a,b]$ aralığında $m.$ dereceden türevi sürekli, reel değişkenli reel değerli fonksiyonlar
L_p	$L_p = \left\{ x:[0,2p] \to ¡ \text{ Lebesgue ölçülebilir ve } \lvert x \rvert_p = \left(\int_0^{2p} \lvert x(t) \rvert^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,\ 1 < p < \infty \right\}$
l_p	$l_p = \left\{ x \in ¡ : \lvert x \rvert_p = \left(\sum_{i \geq 1} \lvert x_i \rvert^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,\ 1 < p < \infty \right\}$
$\lvert \cdot \rvert$	Mutlak değer
$\lVert f \rVert$	$\lVert f \rVert_\infty + \lVert f' \rVert_\infty$
$\lVert f \rVert_\infty$	$\lVert f \rVert_\infty = \inf \left\{ M \geq 0 : \text{hemen hemen her } x \text{ için } \lvert f(x) \rvert \leq M \right\}$

1. GİRİŞ

Modern matematiğin gelişimi, analizin soyut ve aksiyomatik yöntemlerinden etkilenmiştir. Kümelerin cebirsel özelliklerinin analizin gelişimine çok fazla faydası olmadığı için metrik uzaylara ihtiyaç duyulmuştur.

Metrik uzaylar ilk olarak 1906 yılında Maurice Frèchet tarafından verilmiştir [19]. Metrik veya metrik uzay kavramı, klasik analizden modern analize geçiş sağlayan çok önemli bir köprüdür. Öyle ki reel ve kompleks teorilerde bilinen bir çok önemli özelliklerin herhangi bir uzayda nasıl yapılacağını bize gösterir. Ayrıca topolojide soyut olan bir takım kavramlar, metrik uzaylarda daha somut kavramlarla açıklama imkanını sağlar. Maurice Frèchet 1926 yılındaki bir çalışmasında da lineer metrik uzayları tanımlamıştır [20]. Metrik uzaylarla ilgili detayl bilgiler ve uygulama alanları şu kaynaklarda vardır [12, 21, 41, 43, 44].

Normlu lineer uzaylarda sabit nokta teori çalışmaları 1910 da Brouwer ile başlamıştır. Brouwer, $\mathbb{R}^n$ nin kapalı birim yuvarından yine kendi üzerine tanımlanan sürekli dönüşümün sabit noktasının varlığını kanıtlamıştır [11]. Daha sonra 1930 da Schauder, Brouwer'in teoremini $\mathbb{R}^n$ yerine herhangi bir normlu lineer uzay alarak aşağıdaki şekilde genişletmiştir [42].

"X bir normlu lineer uzay, $C \subseteq X$ kapalı ve konveks bir alt küme ve $f : C \to C$ olsun. O zaman f, C de bir sabit noktaya sahiptir".

Metrik uzaylarda sabit nokta teorisi 1922 de Banach'ın büzülme prensibi ile başlamıştır [8].

Genel olarak sabit nokta teori çalışmaları iki yönde gelişmektedir. Birincisi tam metrik uzaylar üzerinde tanımlı büzülme ve büzülme tipi dönüşümler için sabit nokta teori, diğeri ise normlu lineer uzayların kompakt konveks alt kümeleri üzerinde tanımlı sürekli dönüşümler için sabit nokta teoridir.

Son yüzyılda sabit nokta teorisi matematiğin, fonksiyonel analiz, lineer olmayan fonksiyonel analiz, matematiksel analiz, operatör teori, genel topoloji, diferensiyel denklemler, yaklaşım teorisi, potansiyel teori, kontrol sistemleri ve oyun teorisi gibi birçok alanında uygulamaları vardır. Bunların dışında istatistik, mühendislik, matematiksel ekonomi ve esneklik teorisi gibi alanlarda uygulamalarını görebiliriz.

Yukardaki çalışmaları ve sabit nokta teorisi ile ilgili bazı çalışmaları şu kaynaklarda bulabiliriz[5, 9, 10, 17, 22, 24, 28, 30, 46].

Sabit nokta teorisi için metrik uzaylar yeterli midir sorusu son zamanlarda soruldu.

Huang ve Zhang 2007 de sabit noktayı ispatlamak için metrik uzayların bütünüyle yeterli olmadığını ve metrik uzaylardan daha geniş bir uzayın olabileceğini gördüler ve bunun için de bu problemin üstesinden gelmek için konik metrik uzay kavramını verdiler [25]. Yazarlar konik metrik uzaylarda yakınsaklık, tamlık tanımı ve konik metrik uzaylarda büzülebilir dönüşümlerle ilgili bazı sabit nokta teoremleri ispatlamışlardır.

$E = \mathbb{R}^2$ ve $P = \{(x, y) \in E : x \geq 0,\ \ y \geq 0\}$,

olarak bir örnek vermişlerdir. Bu örnek üzerinde tanımlanan dönüşüm öklid metrik uzayında büzülebilir değildir. Fakat konik metrik uzayda büzülebilirdir.

$K < 1$ normal sabitine sahip normal konikler olmadığını ve herbir $s > 1$ için $K > s$ normal sabitli konikler olduğunu göstermişlerdir [39]. Ayrıca normal sabiti ile normal koniği kaldırarak normal olmayan konikler için bazı sonuçların genelleştirmesi verilmiştir [25]. Bazı ortak sabit nokta teoremleri konik metrik uzaylarda ispatlanmıştır [1, 7, 13, 26, 47]. Raja ve Vaezpour $c-$ genişlemeyen, (c, l) düzgün yerel büzülebilir dönüşümü, $f-$ kapanışı ve $c-$ izometrik gibi bazı tanımlar konik metrik uzaylarda tanımlanarak bazı sabit nokta teoremleri ispatlamışlardır [35]. Ayrıca, konik metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri için bazı ilginç uygulamalar vermişlerdir. Abbas ve Rhoades, Huang ve Zhang'ın çalışmasında verilen bazı sabit nokta teoremlerini kendi çalışmalarındaki konik metrik uzaylarda ispatlamışlardır [2, 25]. Ilić ve Rakoćević konik metrik uzaylarda zayıf büzülme tanımını vererek bazı sabit nokta teoremleri ispatlamışlardır [27]. Konik metrik uzaylarda küme değerli büzülme dönüşümü tanımı ilk olarak Wardowski tarafından verilmiştir [48]. Rezapour konik metrik uzaylardaki en iyi yaklaşımların karakterizasyonu hakkında bazı sonuçlar vermiştir [38].

Bu çalışmada, konik metrik uzay üzerinde bazı temel topolojik yapılar ve tanımlar genelleştirildi. Örneğin, dizisel kapalı küme, sınırlı ve tamamen sınırlı kümeler, $c-$ağı, Lebesgue elemanı, kompakt küme, sürekli ve dizisel sürekli dönüşümler. Ayrıca, her konik metrik uzayın topolojik uzay, birinci sayılabilir topolojik uzay ve T_4- uzayı olduğu ispatlandı. Konik metrik uzay üzerindeki Baire'nin kategori teoremini ispatlamak için yoğun değil, birinci (Meager) ve ikinci (Meager değil) kategoriden tanımlar verildi. Ayrıca, konik normlu uzaylar ve konik Banach uzaylar tanımlandı. İki küme arasındaki uzaklık konik metrik uzay üzerinde tanımlanarak, konik metrik uzaylar üzerinde bazı örnekler verildi. Koniğin kuvvetli minihedral konik olduğu kabul edilerek, bazı sabit nokta teoremleri elde etmek için konik metrik uzaylar üzerindeki çapsal büzülebilir ve asimptotik çapsal büzülebilir dönüşümlerin tanımları verildi. Sonuç olarak, konik metrik uzay üzerindeki iki nokta arasındaki skaler uzaklığı tanımlayarak genelleştirilmiş büzülme dönüşümleri, bazı sabit nokta teoremleri ve ortak sabit nokta teoremleri elde edildi.

2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde ileride kullanacağımız bazı temel tanımlara yer verilecektir.

2.1. Tanım

$X \neq f$ bir küme ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda

$$Tx_0 = x_0 \tag{2.1}$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ varsa, x_0 noktasına T nin X de bir sabit noktası denir.

Aşağıdaki örneklerden de görüleceği gibi $T : X \to X$ ile tanımlanan bir T dönüşümünün bir tek sabit noktası olabilir veya birden çok olabilir veya hiç olmayabilir.

2.1. Örnek

(1) $X = [0,\infty)$ ve $T : X \to X$, $Tx = \dfrac{x}{2}$ olsun. Bu durumda $x_0 = 0$ bu dönüşümün bir tek sabit noktasıdır.

(2) $X = [0,\infty)$ ve $T : X \to X$, $Tx = x^2$ olsun. Bu durumda $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ bu dönüşümün iki sabit noktasıdır.

(3) $X = (-\infty,\infty)$ ve $T : X \to X$, $Tx = x^3$ olsun. Bu durumda $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ bu dönüşümün üç sabit noktasıdır.

(4) $X = [0,\infty)$ ve $T : X \to X$, $Tx = x^2 + b$, $b > 0$ olsun. Bu durumda T nin hiç bir sabit noktası yoktur.

I, X üzerindeki birim dönüşüm olmak üzere $T : X \to X$ dönüşümünün sabit noktası aslında

$$(T - I)(x) = 0$$

denkleminin çözümleridir. O halde bu denklemin çözümünü bulmak için standart bir teknik, buna karşılık gelen dönüşümün sabit noktalarını bulmaktır.

2.2. Tanım

Boş olmayan bir X kümesi ve bir

$$\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+ , \quad (x, y) \to \rho(x, y)$$

dönüşümü verilsin. Eğer bu ρ dönüşümü her $x, y, z \in X$ için

(M1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(M2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

(M3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$; (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde uzaklık fonksiyonu ya da metrik adını alır ve bu durumda (X, ρ) ikilisine bir metrik uzay denir. Burada (M1) - (M3) özelliklerine metrik aksiyomları denir.

2.3. Tanım

E bir reel Banach uzayı ve P, E nin bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan P kümesine bir konik denir.

P1) P boş olmayan kapalı bir küme ve $P \neq \{q\}$;

P2) $a,b \in \mathbb{R}$, $a,b \geq 0$ olsun $x,y \in P$ iken $ax+by \in P$;

P3) $x \in P$ ve $-x \in P$ iken $x = q$.

2.4. Tanım

E bir reel Banach uzayı ve P, E nin bir alt kümesi olsun. $x \leq y$ ancak ve ancak $(y-x) \in P$ ile tanımlı $\leq$ bağıntıya P ye göre kısmi sıralama denir. $x < y$ ile $x \leq y$ fakat $x \neq y$ yi kastediyoruz. $x << y$ ile $(y-x) \in \dot{I}\c{c}P$ yi kastediyoruz. ($\dot{I}\c{c}P \equiv P$ nin içi) [25].

İspatsız verilen bir not, aşağıda önerme olarak verildi [39].

2.1. Önerme

E bir reel Banach uzayı, $P \subset E$ bir konik ve $l > 0$ reel sayı olsun. Aşağıdaki ifadeler vardır.

(i) $\dot{I}\c{c}P + \dot{I}\c{c}P \subset \dot{I}\c{c}P$.

(ii) $l\,\dot{I}\c{c}P \subset \dot{I}\c{c}P$.

İspat

(i) $x \in \dot{I}\c{c}P$ ve $y \in \dot{I}\c{c}P$ olsun. Bu durumda en az $e_1 > 0$ ve $e_2 > 0$ vardır öyle ki $B(x,e_1) \subset P$ ve $B(y,e_2) \subset P$ dir. Şimdi

$$B = B\left(x+y, e = \min\{e_1, e_2\}\right) \subset P$$

olduğunu göstereceğiz. $z \in B$ olsun. Bu durumda

$$\|z-x-y\|<e$$

olur. Bu ise

$$\|z-x-y\|<e_1 \text{ ve } \|z-x-y\|<e_2$$

Olmasını gerektirir. Buradan

$$(z-x)\in B(y,e_2)\subset P \text{ ve } (z-y)\in B(x,e_1)\subset P$$

dir. Şimdi (P2) özelliğinden, $(2z-x-y)\in P$ dir. $x\in P$ olduğundan $(2z-x-y+x)\in P$ olur. Buradan $(2z-y)\in P$ dir. $y\in P$ olduğundan $(2z-y+y)\in P$ dir. Buradan $2z\in P$ dir. (P2) den $\frac{1}{2}2z\in P$ olur ve böylece $z\in P$ dir. Yani $B(x+y,e)\subset P$ olur. O halde $(x+y)\in \dot{I}\text{ç}P$ olur.

(ii) $l>0$ bir reel sayı ve $x\in \dot{I}\text{ç}P$ olsun. Bu durumda $x\in B(x,e)\subset P$ olacak şekilde bir $e>0$ vardır. $l\,x\in \dot{I}\text{ç}P$ olduğunu göstermek için $B(l\,x,l\,e)\subset P$ olduğunu göstereceğiz. $z\in B(l\,x,l\,e)$ olsun. Bu ise

$$\|z-l\,x\|<l\,e$$

olur.

$$l\left\|\frac{1}{l}z-x\right\|<l\,e \text{ ve } \left\|\frac{1}{l}z-x\right\|<e$$

olur. Bu ise $\frac{1}{l} z \in P$ dir. (P2) den $z \in P$ dir ve böylece $B(l\, x, l\, e) \subset P$ dir. Yani $l\, x \in \dot{I}\c{c}P$ olur.

2.5. Tanım

E bir reel Banach uzayı ve P, E nin bir alt kümesi olsun. Her $x, y \in E$ ve $q \leq x \leq y$ için

$$\|x\| \leq K\|y\|$$

olacak şekilde $K \geq 1$ sayısı varsa P koniğine normal konik denir [25].

Konik, fakat normal konik olmayan bir örnek verelim.

2.2. Örnek

$E = C_{\mathbb{R}}^{2}([0,1])$, $\|f\| = \|f\|_{\infty} + \|f^{'}\|_{\infty}$ normu ile ve her $k \geq 1$, $f(x) = x$ ve $g(x) = x^{2k}$ için $P = \{f \in E : f \geq q\}$ olsun. O zaman $x \in [0,1]$ olduğundan $q \leq g \leq f$, $\|f\| = 2$ ve $\|g\| = 2k+1$ olur. Aynı zamanda,

$$2 = \|f(x)\| < \|g(x)\| = 2k+1$$

olur ve böylece,

$$2k = k\|f(x)\| < \|g(x)\| = 2k+1$$

olduğundan k , P nin normal sabiti değildir. O zaman, P normal konik değildir [39].

2.6. Tanım

E bir reel Banach uzayı ve P, E nin bir alt kümesi olsun. Artan bir dizinin üstten sınırlı her dizisi yakınsak ise P ye düzgün (regüler) konik denir. Eğer $\{x_n\}$ dizisi için $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq y$ olacak şekilde bir $y \in E$ varsa o zaman $\|x_n - x\| \to 0$, $n \to \infty$ olacak şekilde bir $x \in E$ vardır. Denk olarak azalan alttan sınırlı her dizi yakınsak ise P ye düzgün (regüler) konik denir [25].

2.7. Tanım

E bir reel Banach uzayı ve P, E nin bir alt kümesi olsun. Eğer her $x, y \in E$ için $\sup\{x, y\}$ varsa P ye minihedral konik denir ve E nin üstten sınırlı her alt kümesinin supremumu varsa E ye kuvvetli minihedral denir. Sonuç olarak E nin alttan sınırlı herhangi bir alt kümesinin infimumu vardır [18].

2.3. Örnek

$E = \mathbb{R}^2$, $P = \{(x, y) \in E : x \geq 0,\ y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ olsun. P bir koniktir. Ayrıca P bir kuvvetli minihedral koniktir.

2.4. Örnek

$E = \mathbb{R}^n$, $P = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, ..., n\}$ olsun.

$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \leq y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ ancak ve ancak her $i = 1, 2, 3, ..., n$ için, $(y_i - x_i) \geq 0$.

Bu durumda P nin herhangi bir alt kümesinin infimumu vardır.

2.8. Tanım

E bir reel Banach uzayı ve P, E nin bir alt kümesi olsun. Eğer her $x, y \in E$ için $q \le x \le y$ olması,

$$\|x\| \le \|y\|$$

olmasını gerektiriyorsa E normuna monotonik denir [18].

2.1. Not

Her $n \in \mathbb{N}$ ve $a, b \in E$ için $a.n \le b$ iken $a \le 0$ oluyorsa böyle bir kısmi sıralamaya Archimedean denir. Eğer kısmi sıralama bir kapalı konik ile veriliyorsa sıralamanın Archimedean olduğu açıktır.

Gerçekten, $a, b \in E$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $a.n \le b$ olsun. Kısmi sıralama tanımından $(b - a.n) \in P$ olur. (P2) den $\left(\frac{b}{n} - a\right) \in P$ olur. Buradan $a \le \frac{b}{n}$ elde edilir.

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{b}{n} - a - (-a)\right\| = \lim_{x\to\infty}\left\|\frac{b}{n}\right\| = \lim_{x\to\infty}\frac{\|b\|}{n} = 0$$

olur. O halde $\left(\frac{b}{n} - a\right) \to -a$ dır. P kapalı olduğundan $-a \in P$ olur ve böylece $a \le 0$ dır.

Burada belirtmekte fayda vardır ki bazı reel Banach uzaylarda içi boş olan konikler vardır. Buna örnek olarak l_p, $1 \le p < \infty$ dizi uzayları ve L_p, $1 \le p < \infty$ Lebesgue integrallenebilir uzayları verebiliriz [18]. Diğer taraftan $\mathbb{R}^n$ öklid uzaydaki pozitif koniğin içi boş değildir. Örneğin $\mathbb{R}^2$ deki,

$$P = \{(x, y) \in E : x \geq 0, \;\; y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

pozitif koniğinin içi

$$\dot{I}\c{c}P = \{(x, y) \in E : x > 0, \;\; y > 0\}$$

olup, boş değildir. Koniklerle ilgili daha fazla bilgi için şu kaynağa bakılabilir [6].

Bu çalışmada, E bir reel Banach uzayı ve P, E de $\dot{I}\c{c}P \neq \phi$ olacak şekilde bir konik ve $\leq$, P ye göre bir kısmi sıralamadır.

3. KONİK METRİK UZAYLAR

3.1. Konik Metrik Uzaylarda Bazı Temel Tanım ve Teoremler

Bu kısımda konik metrik uzaylar üzerinde bazı temel tanım ve teoremlere yer verilecektir.

3.1. Tanım

X boş olmayan küme, $d : X \times X \to E$ dönüşüm olsun.

(d1) $\forall x, y \in X$ için $\theta < d(x,y)$ ve $d(x,y) = \theta \Leftrightarrow x = \theta$;

(d2) $\forall x, y \in X$ için $d(x,y) = d(y,x)$;

(d3) $\forall x, y \in X$ için $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$; (üçgen eşitsizliği)

şartları sağlanıyorsa d ye konik metrik, (X,d) ikilisine de konik metrik uzay denir. Burada (d1) - (d3) özelliklerine konik metrik aksiyomlar denir [25].

3.1. Örnek

$E = \mathbb{R}^2$, $P = \{(x,y) \in E : x \geq 0,\ y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$, $X = \mathbb{R}$, $d : X \times X \to E$, $d(x,y) = (|x-y|, a\,|x-y|)$, $a \geq 0$ olsun. (X,d), (E,P) üzerinde bir konik metrik uzaydır.

Gerçekten,

(d1) : $d(x,y) = (|x-y|, a\,|x-y|) > \theta$,

$\Rightarrow)$ $d(x,y) = \theta \Rightarrow |x-y| = \theta,\ a\,|x-y| = \theta \Rightarrow x = y$.

$\Leftarrow)$ $x = y \Rightarrow d(x,y) = (|x-y|, a\,|x-y|) = (0,0) \Rightarrow d(x,y) = \theta$.

(d2) : $d(x,y)=\left(|x-y|,a\,|x-y|\right)=\left(|y-x|,a\,|y-x|\right)=d(y,x)$.

(d3): $d(x,y)=\left(|x-y|,\,a\,|x-y|\right)=\left(|x-z+z-y|,a\,|x-z+z-y|\right)\leq$

$\left(|x-z|+|z-y|,a\,|x-z|+a\,|z-y|\right)=\left(|x-z|,\,a\,|x-z|\right)+\left(|z-y|,\,a\,|z-y|\right)=d(x,y)+d(z,y).$

3.2. Örnek

$E=\mathbb{R}^2$, $P=\left\{(x,y)\in E : x\geq 0,\;\; y\geq 0\right\}\subset \mathbb{R}^2$, $d:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to E$,

$d\left((x_1,x_2),(y_1,y_2)\right)=\left(|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\right)$ olsun. (X,d), (E,P) üzerinde bir konik metrik uzaydır.

3.1. Not

Not edelim ki her metrik uzay bir konik metrik uzaydır. $E=\mathbb{R}_+$ alınırsa (X,d) konik metrik uzayı (X,r) metrik uzayına dönüşür.

3.3. Örnek

$E=l_1$, $P=\left\{\{x_n\}_{n\geq 1}\in E : x_n\geq q,\ \text{her } n=1,2,...\text{ için}\right\}$ olsun. Ayrıca, (X,r) metrik uzay ve $d:X\times X\to E$ için,

$$d(x,y)=\left\{\frac{r\,(x,y)}{2^n}\right\}_{n\geq 1}$$

tanımlansın.

Gerçekten, (X,d) bir konik metrik uzay ve P nin normal sabiti $K=1$ dir [39].

3.2. Tanım

(X,d) bir konik metrik uzay, X içinde bir dizi $\{x_n\}$ ve $x\in X$ olsun. $\forall c\in E$, $q \ll c$ için $\exists m\in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n>m$ için $d(x_n,x)\ll c$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine yakınsak dizi denir ve $n\to\infty$ için $x_n\to x$ ya da $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ şeklinde gösterilir [25].

3.3. Tanım

(X,d) bir konik metrik uzay ve X içinde bir dizi $\{x_n\}$ olsun. Eğer $\forall c\in E$, $q \ll c$ için $\exists N\in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n,m>N$ için $d(x_n,x_m)\ll c$ ise $\{x_n\}$ dizisine X içinde bir Cauchy dizisi denir [25].

3.4. Tanım

Bir (X,d) konik metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir noktaya yakınsak ise (X,d) ikilisine tam konik metrik uzay denir [25].

3.5. Tanım

(X,d) bir konik metrik uzay ve $A\subset X$ olsun. $x_n\to x$ olacak şekildeki $x_n\in A$ için $x\in A$ ise A ya dizisel kapalı denir.

3.6. Tanım

(X,d) bir konik metrik uzay olsun. Eğer $A\subset X$ ve her $x,y\in A$ için $\exists c\in E$ ve $q \ll c$ öyle ki $d(x,y)\le c$ ise A ya üstten sınırlı küme $d(A)=\sup\{d(x,y): x,y\in A\}$ mevcut ise A ya sınırlı küme denir. Eğer supremum mevcut değilse A ya sınırsız küme denir.

3.1. Lemma

(X,d) bir konik metrik uzay olsun. Her $q << c$, $c \in E$ için en az bir $d > 0$ vardır öyle ki $\|x\| < d$ iken $(c-x) \in \dot{I}\c{c}P$ (yani $x << c$) dır.

İspat

$q << c$, $c \in E$ olduğundan $c \in \dot{I}\c{c}P$ dir. $\{x \in E : \|x-c\| < d\} \subset \dot{I}\c{c}P$ olacak şekilde bir $d > 0$ bulabiliriz.
Şimdi $\|x\| < d$ ise

$$\|c-x-c\| = \|-x\| = \|x\| < d$$

olur. Buradan $\|(c-x)-c\| < d$ olur. Bu ise $(c-x) \in \dot{I}\c{c}P$ olduğunu verir.

3.2. Lemma

(X,d) bir konik metrik uzay P, normal sabit K ile normal konik ve $\{x_n\}$, X içinde bir dizi olsun. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisinin X içinde yakınsak olması için gerek ve yeter şart $n \to \infty$ iken $d(x_n, x) \to q$ olmasıdır [25].

İspat

$(\Rightarrow)$ $x_n \to x$ olsun. $\forall e > 0$ için $c \in E$ olacak şekilde bir $q << c$ ve $K\|c\| < e$ seçebiliriz. Bu durumda en az bir $N \in \text{¥}$ vardır ki öyle ki her $n > N$ için $d(x_n, x) << c$ dır. Böylece, $n > N$ iken

$$\|d(x_n, x)\| \le K\|c\| < e$$

olur. Bu ise $n \to \infty$ iken $d(x_n, x) \to q$ olduğunu verir.

($\Leftarrow$) $n \to \infty$ iken $d(x_n, x) \to q$ olsun. $q << c$ olacak şekildeki $c \in E$ için en az bir $d > 0$ vardır öyle ki $\|x\| < d$ iken $(c - x) \in İçP$ dir. Bu d için en az bir $N \in$ ¥ vardır öyle ki her $n \in$ ¥ için $\|d(x_n, x)\| < d$ olur. Böylece $(c - d(x_n, x)) \in İçP$ olur. Bu da $d(x_n, x) << c$ olduğunu verir. Bu nedenle $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsar.

3.3. Lemma

(X, d) bir konik metrik uzay, P normal sabit K ile bir normal konik ve $\{x_n\}$, X içinde bir dizi olsun. $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$, X içinde iki dizisi ve $n \to \infty$ iken $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ olsun. $n \to \infty$ iken $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$ olur [25].

İspat

$\forall e > 0$ için $q << c$ ve $\|c\| < \dfrac{e}{4k+2}$ olacak şekilde bir $c \in E$ seçelim. $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ olduğundan $\exists N \in$ ¥ $\ni \forall n > N$ için $d(x_n, x) << c$ ve $d(y_n, x) << c$ olur.

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n) \leq d(x, y) + 2c\,, \tag{3.1}$$

$$d(x\ , y\ ) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y_n) + d(y, y_n) \leq d(x_n, y_n) + 2c\,, \tag{3.2}$$

olur. Böylece, Eş. 3.1'den,

$$q \leq d(x, y) + 2c - d(x_n, y_n)$$

ve Eş. 3.2'den,

$$q \leq d(x_n, y_n) + 2c + 2c - d(x_n, y_n) = 4c$$

elde edilir. Ohalde

$$q \leq d(x, y) + 2c - d(x_n, y_n) \leq 4c$$

ve

$$\|d(x_n, y_n) - d(x, y)\| = \|d(x, y) - d(x_n, y_n) + 2c - 2c\| \leq \|d(x, y) + 2c - d(x_n, y_n)\| + \|2c\|$$
$$\leq 4K\|c\| + 2\|c\| = (4K+2)\|c\| < e \ .$$

O halde $n \to \infty$ için $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$ olur.

3.4. Lemma

(X, d) bir konik metrik uzay, P normal K sabiti ile normal konik ve $\{x_n\}$, X içinde bir dizi olsun. $\{x_n\}$ dizisinin X içinde Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul $n, m \to \infty$ iken $d(x_n, x_m) \to q$ olmasıdır [25].

İspat

($\Rightarrow$) $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisi olsun.
$\forall e > 0$ için $q << c$ ve $K\|c\| < e$ olacak şekilde bir $c \in E$ seçelim. $\exists N \in$ ¥ э $\forall n, m > N$ için $d(x_n, x_m) << c$ olur. Buradan,

$$\|d(x_n, x_m)\| \leq K\|c\| < e$$

elde edilir. O halde $n, m \to \infty$ iken $d(x_n, x_m) \to q$.

$(\Leftarrow)$ $d(x_n, x_m) \to q$, $n, m \to \infty$ olsun.

$q \ll c$ olacak şekilde $c \in E$ seçelim. $\exists d > 0 \ni \|x\| < d$ iken Lemma 3.1 den $(c - x) \in \text{İç}P$ dir. Buradan $\exists N \in \mathbb{N} \ni \forall n, m > N$ için $d(x_n, x_m) < d$ dır. O zaman, $(c - d(x_n, x_m)) \in \text{İç}P$ dir. Bu ise $d(x_n, x_m) \ll c$ olur. Bu nedenle $\{x_n\}$ bir Cauchy dizidir.

3.5. Lemma

(X, d) bir konik metrik uzay, K normal sabiti ile P bir normal konik, $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$, X içinde iki dizi ve $n \to \infty$ için $x_n \to x$, $y_n \to y$ olsun. Eğer her n için $x_n \leq y_n$ ise $x \leq y$ olur.

İspat

$x_n \leq y_n$ olsun. $x_n \leq y_n$ ise $(y_n - x_n) \in P$ olur. $x_n \to x$, $y_n \to y$ olduğundan, $(y_n - x_n) \to (y - x)$ olur. P kapalı olduğundan $(y - x) \in P$ dir. Bu ise $x \leq y$ olduğunu verir.

3.6. Lemma

(X, d) bir konik metrik uzay, K normal sabiti ile P bir normal konik, $\{x_n\}$, X içinde bir dizi olsun. $\{x_n\} \to x$ ve $\{x_n\} \to y$ ise $x = y$ dir. Yani $\{x_n\}$ dizisinin limiti tektir [25].

İspat

$q \ll c$ olacak şekilde herhangi bir $c \in E$ olsun. $\{x_n\}$ yakınsak olduğundan $\exists N \in \mathbb{N}$ $\ni \forall n > N$ için $d(x_n, x) \ll c$ ve $d(x_n, y) \ll c$ olur.

$d(x,y) \le d(x_n,x) + d(x_n,y) \le 2c$ olur. Böylece $\|d(x,y)\| \le 2K\|c\| \to 0$ olur. O halde $d(x,y) = q$ olur. Böylece $x = y$ olur.

3.7. Lemma

(X,d) bir konik metrik uzay, $\{x_n\}$, X içinde bir dizi olsun. $\{x_n\}$, X içinde x noktasına yakınsıyorsa $\{x_n\}$, X içinde bir Cauchy dizidir [25].

İspat

$q << c$ olacak şekilde herhangi bir $c \in E$ olsun. $\exists N \in \mathbb{N} \ni \forall n,m > N$ için $d(x_n,x) << \frac{c}{2}$ ve $d(x_m,x) << \frac{c}{2}$ olur. $d(x_n,x_m) \le d(x_n,x) + d(x_m,x) = \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c$ olur. O halde $\{x_n\}$ bir Cauchy dizidir.

3.8. Lemma

(X,d) bir konik metrik uzay olsun. Her $c_1 >> q$ ve $c_2 >> q$, $c_1, c_2 \in E$ için $\exists c \in E$ ve $q << c$ $\ni$ $c << c_1$ ve $c << c_2$.

İspat

$c_2 >> q$ olsun. Lemma 3.1' den $d > 0$ bulabiliriz öyle ki $\|x\| < d$ iken $x << c_2$ olur. $\frac{1}{n_0} < \frac{d}{\|c_1\|}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı seçelim. $c = \frac{c_1}{n_0}$ olsun. Bu durumda $\|c\| = \left\|\frac{c_1}{n_0}\right\| = \frac{\|c_1\|}{n_0} < d$ olur ve böylece, $c << c_2$ dir. Fakat aynı zamanda açıktır ki

$q \ll c$ ve $c = \frac{c_1}{n_0}$ olduğundan $c \ll c_1$ ve $c_1 \neq c$ dır ve böylece, $c \ll c_1$ demektir. O halde $c \ll c_1$ ve $c \ll c_2$.

3.9. Lemma

$K < 1$ normal sabiti ile bir normal konik yoktur [39].

İspat

(X, d) bir konik metrik uzay ve P ise $K < 1$ normal sabiti ile normal konik olsun. $K < 1 - e$ olacak şekilde $x \in P$, $0 < e < 1$ bir elemanını seçelim. O zaman, $(1-e)x \leq x$ olur. Fakat $(1-e)\|x\| > K\|x\|$ olur. Bu bir çelişkidir.

3.10. Lemma

Her düzgün konik bir normal koniktir [39].

İspat

P bir düzgün konik olsun fakat normal konik olmasın. Her $n \geq 1$ için $t_n, s_n \in P$ seçelim öyle ki $t_n - s_n \in P$ ve $n^2\|t_n\| < \|s_n\|$ olsun. Her $n \geq 1$, $y_n = \frac{t_n}{\|t_n\|}$ ve $x_n = \frac{s_n}{\|t_n\|}$ olsun. O zaman her $n \geq 1$ için $y_n - x_n \in P$, $\|y_n\| = 1$ ve $n^2 < \|x_n\|$ olur. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\|y_n\|$ serisi yakınsak ve P kapalı olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} y_n = y$ olacak şekilde bir $y \in P$ vardır. Şimdi $0 \leq x_1 \leq x_1 + \frac{1}{2^2}x_2 \leq x_1 + \frac{1}{2^2}x_2 + \frac{1}{3^2}x_3 \leq \ldots \leq y$ alalım. Dolayısıyla, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x_n$

yakınsaktır çünkü P düzgündür. Sonuç olarak, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\|x_n\|}{n^2}=0$. Bu bir çelişkidir. İspat tamamlanır.

Şimdi Lemma 3.9 kullanılarak yazarlar $K=1$ normal sabiti ile normal konğin bulunabileceğini ve aynı zamanda Lemma 3.10 nın tersinin doğru olmadığına dair aşağıdaki örneği vermişlertir [39].

3.4. Örnek

$E=C_{\mathbb{R}}\left([0,1]\right)$ supremum normu ve $P=\left\{ f\in E : f\geq q\right\}$ olsun. P, $K=1$ normal sabiti ile bir koniktir. Şimdi elemanları E de olan azalan ve alttan sınırlı fakat E de yakınsak olmayan $x\geq x^2\geq x^3\geq ...\geq q$ dizisini ele alalım. O zaman, Lemma 3.10 nun tersi doğru değildir [39].

3.1. Teorem

Her $\left(X,d\right)$ konik metrik uzay bir topolojik uzaydır.

İspat

$q<<c$, $c\in E$ için $B(x,c)=\left\{y\in X : d(x,y)<<c\right\}$ ve $b=\left\{B(x,c) : x\in X,\ c>>q\right\}$ olsun. $t_c=\left\{U\subset X : \forall x\in U \text{ için } \exists B\in b \ni x\in B\subset U\right\}$ ailesi X üzerinde bir topolojidir. Gerçekten,

$t_1)$ f, $X\in t_c$

$t_2)$ $U, V\in t_c$ olsun. $x\in U \cap V \Rightarrow x\in U$ ve $x\in V$. $c_1>>q$, $c_2>>q$ bulabiliriz öyle ki $x\in B(x,c_1)\subset U$ ve $x\in B(x,c_2)\subset V$ dır. Lemma’ 3.8 den $q<<c$ bulabiliriz öyle ki $c<<c_1$ ve $c<<c_2$. O halde,

$x \in B(x,c) \subset B(x,c_1) \cap B(x,c_2) \subset U \cap V$

o halde $U \cap V \in t_c$.

$t_3)$ $\forall a \in \Delta$ için $U_a \in t_c$ olsun. $x \in \bigcup_{a \in \Delta} U_a$ olsun. Bu durumda $\exists a_0 \in \Delta$ ∍ $x \in U_a$ dır. $x \in B(x,c) \subset U_a \subset \bigcup_{a \in \Delta} U_a$ olacak şekilde bir $q << c$ bulabiliriz. O halde $\bigcup_{a \in \Delta} Ua \in t_c$.

3.7. Tanım

(X,d) bir konik metrik uzay, $q << c$ ve $c \in E$ olsun. Eğer her bir $p \in A$ için $d(p, e_{i_0}) << c$ olacak şekilde $e_{i_0} \in N$ varsa X kümesinin $N = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ sonlu alt kümesine bir $c-$ ağı denir.

3.8. Tanım

(X,d) bir konik metrik uzay olsun. Eğer her bir $c >> q$, $c \in E$, $d(N_i) << c$ iken $i = 1,2,3,...,n$ için $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} N_i$ sağlayan N_i kümelerinin birleşimi A ise A ya X de tamamen sınırlı küme denir.

3.9. Tanım

(X,d) bir konik metrik uzay, $A \subset X$ ve $i = 1,2,3,...,n$ için $L = \{G_i\}_{i \in I} \subset t_c$ olsun. A nın her B alt kümesi için $d(B) < c$ iken $B \subset G_{i_0}$ olacak şekilde bir $G_{i_0} \in L$ varsa $c \in E$, $q << c$ elemanına bir L örtüsü için bir Lebesgue elemanı denir.

3.10. Tanım

(X,d) bir konik metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. t_c kümesinin A alt kümesinin her örtüsünün sonlu bir örtüsü varsa, A ya (X,d) nin bir kompakt alt kümesi denir.

3.11. Tanım

(X,d) bir konik metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer A daki her $\{x_n\}$ dizisinin A da yakınsak olan bir $\{x_{n_i}\}$ alt dizisi varsa A ya dizisel kompakt konik metrik uzay denir [25].

3.12. Tanım

(X,d) bir konik metrik uzay ve $x \in X$ olsun. Tx'i içeren her $V \in t_c$ için $T(U) \subset V$ olacak şekilde x noktasını içeren $U \in t_c$ varsa T dönüşümüne x noktasında süreklidir denir. T dönüşümü her $x \in X$ noktasında sürekli ise X üzerinde süreklidir denir.

3.13. Tanım

(X,d) bir konik metrik uzay ve $T : X \to X$ olsun. $x_n \in X$ için $x_n \to x$ iken $Tx_n \to Tx$ ise T dönüşümüne dizisel süreklidir denir.

3.1. Önerme

(X,d) bir konik metrik uzay olsun. $q << c$ olacak şekilde bir $c \in E$ için

$$\overline{B(x,c)} = \{y \in X : d(x,y) \leq c\}$$

kümesi dizisel kapalıdır.

İspat

$y_n \in \overline{B(x,c)}$ bir dizi ve $y_n \to y$ olsun. Bu durumda $d(y_n, x) \leq c$ ve $d(y_n, x) \to q$, $n \to \infty$. O halde, $y \in \overline{B(x,c)}$ olması için gerek ve yeter şart $d(x,y) \leq c$ olması için gerek ve yeter şart $(c - d(x,y)) \in P$. Lemma 3.3' den $d(y_n, x) \to d(x,y)$. P kapalı olduğundan $\lim_{n\to\infty}(c - d(y_n, x)) = (c - d(x,y)) \in P$.

3.2. Önerme

K normal sabiti ile P kuvvetli minihedral konik ve $A \subset E$ olsun. Anın sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $d'(A) = \sup_{x,y\in A} \| d(x,y) \| < \infty$ olmasıdır.

İspat

($\Rightarrow$) A sınırlı olsun. Bu durumda $\forall x, y \in A$ için $\exists c \in E$ ve $q << c$ öyle ki $d(x,y) \leq c$ dır. Bu durumda her $x, y \in A$ için $\| d(x,y) \| \leq K\|c\| < \infty$ dır. Böylece $\sup_{x,y\in A} \| d(x,y) \| < \infty$ olur.

($\Leftarrow$) $d'(A) = \sup_{x,y\in A} \| d(x,y) \| = M < \infty$ olsun. Sabit $c_1 >> q$ alalım. Lemma 3.1' den en az bir $d > 0$ var öyle ki $\|z\| < d$ ise her $x, y \in A$ için $c_1 >> z$ olur. $c_{x,y} = \dfrac{d\, d(x,y)}{2\| d(x,y) \|}$ olsun. Bu durumda $\|c_{x,y}\| = \dfrac{d}{2} < d$ olur. Böylece $c_1 >> \dfrac{d\, d(x,y)}{2\| d(x,y) \|}$ ve böylece $(c_1 - \dfrac{d\, d(x,y)}{2\| d(x,y) \|}) \in İçP$ olur. $\dfrac{2\| d(x,y) \|}{d}$ ile çarparak

$$(2c_1 \frac{\| d(x,y) \|}{d} - d(x,y)) \in İçP$$

olur. O halde,

$$d(x,y) << \frac{2\| d(x,y) \|}{d} c_1 \leq \frac{2M}{d} c_1 = c \in İçP$$

dir. Buradan $d(x,y) \leq c$ olur. P kuvvetli minihedral olduğundan A sınırlıdır.

3.3. Önerme

(X,d) bir konik metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. A nın tamamen sınırlı olması için gerek ve yeter koşul her $c >> q$, $c \in E$ için A nın bir $c-$ağı olmasıdır.

İspat

A tamamen sınırlı ve $c >> q$, $c \in E$ olsun. $N_1, N_2, ..., N_n$ bulabiliriz öyle ki $i = 1,2,3,...,n$ için, $d(N_i) << c$ iken

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} N_i$$

dir. $i = 1,2,3,...,n$ için herbir N_i den e_i seçebiliriz. $N = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ olsun. N nin A nın bir $c-$ağı olduğunu gösterelim. $p \in A$ olsun. Bu durumda $p \in N_{i_0}$ olacak şekilde $i_0 = 1,2,3,...,n$ için en az bir e_{i_0} vardır. p ve $e_{i_0} \in N_{i_0}$ ve $d(N_i) << c$ olduğundan $d(p, e_{i_0}) << c$.

Tersine olarak, $c >> q$, $c \in E$ olsun. Her $p \in A$ için $e_{i_0} \in N$ ve $d(p, e_{i_0}) << c$ olacak şekilde X in sonlu bir $N = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ alt kümesini bulabiliriz. $i = 1,2,3,...,n$ için $N_i = B(e_i, c) = \{x \in X : d(x, e_i) << c\}$ olsun. Bu durumda açıkça $i = 1,2,3,...,n$ için $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} N_i$ ve $d(N_i) << c$ olur.

3.4. Önerme

(X,d) bir konik metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. A dizisel kompakt ise A tamamen sınırlıdır.

İspat

En az bir $c >> q$, $c \in E$ için A kümesi bir $c-$ağına sahip olmasın. Böylece, bir $x_1 \in A$ için en az bir $x_2 \in A$ var öyle ki $(c - d(x_1, x_2)) \notin \dot{I}çP$ olur. Bu durumda $\{x_1, x_2\}$, A için $c-$ağı olmaz. O halde en az bir $x_3 \in A$ var öyle ki $(c - d(x_1, x_2)) \notin \dot{I}çP$ ve $(c - d(x_3, x_2)) \notin \dot{I}çP$ olur. Aynı şekilde devam edersek bir $x_n \in A$ dizisi elde ederiz öyle ki $\forall n, m \in \mathbb{N}$ için $(c - d(x_n, x_m)) \notin \dot{I}çP$. O halde $\{x_n\}$ in her alt dizisi Cauchy dizisi olmaz ve $\{x_n\}$ yakınsak bir diziye sahip değildir. O halde A dizisel kompakt değildir.

3.5. Önerme

A bir konik metrik uzayın dizisel kompakt alt uzayı olsun. Bu durumda A için t_c nin her $L = \{G_i\}_{i \in I}$ örtüsünün elemanları bir Lebesgue elemanına sahiptir.

İspat

$L = \{G_i\}_{i \in I}$, A nın Lebesgue elemanını içermeyen örtüsü olsun. O zaman her $G_i \in L$ için sabit $c >> q$, $c \in E$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $B_n \subset A$ ile $d(B_n) < \dfrac{c}{n}$ ve $B_n \not\subset G_i$ elde edilir. A dizisel kompakt olduğu için $b_n \in A$ dizisi $b_{n_k} \to p \in A$ olan alt dizisine sahiptir. Fakat $A = \bigcup_{i \in I} G_i$ dir ve dolayısıyla $p \in G_{i_0}$ olacak şekilde bir $i_0 \in I$ vardır. $p \in B(p, c_1) \subset G_{i_0}$ olacak şekilde bir $c_1 >> q$, $c_1 \in E$ buluruz. $b_{n_k} \to p$ ve

$c_1, c \in \dot{I}\c{c}P$ olduğundan $i_{n_0} \in ¥$ öyle ki $d(p, b_{i_{n_0}}) << \frac{c_1}{2}$ ve $\frac{2c}{i_{n_0}} << c_1$ olacak şekilde bir $i_{n_0} \in ¥$ vardır. Eğer $x \in B_{i_{n_0}}$ ise o zaman,

$$d(x, p) \leq d(x, b_{i_{n_0}}) + d(b_{i_{n_0}}, p) << \frac{c}{i_{n_0}} + \frac{c_1}{2} << \frac{c_1}{2} + \frac{c_1}{2} = c_1 .$$

$x \in G_{i_0}$ ve $B_n \subset G_{i_0}$ olur. Bu ise $B_n \not\subset G_i$ olmasıyla çelişir. O halde $L = \{G_i\}_{i \in I}$, A nın Lebesgue elemanını içeren örtüsü olmak zorundadır.

3.6. Önerme

(X, d) bir konik metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Her dizisel kompakt konik metrik uzay kompakttır.

İspat

$L = \{G_i\}_{i \in I}$, A nın bir açık örtüsü olsun. A dizisel kompakt olduğundan en az bir $c >> q$, $c \in E$ vardır öyle ki $d(B) < c$ olacak şekildeki her $B \subset A$ için en az bir $i_0 \in I$ öyleki $B \subset G_{i_0}$. A tamamen sınırlı olduğundan $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} N_i$ ve $d(N_i) << c$.
Her $i = 1,2,3,...,n$ için $N_i \subset G_i$ olacak şekilde $G_1, G_2, ..., G_n \in L$ vardır. O halde,

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} N_i \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_i$$

dır ve böylece, A kompakttır.

3.7. Önerme

Her (X,d) konik metrik uzayı birinci sayılabilirdir.

İspat

$p \in X$ ve $c >> q$, $c \in E$ olsun. $b_p = \left\{ B(p,\frac{c}{n}) : n \in \mathbb{N} \right\}$ kümesinin p noktasının yerel tabanı olduğunu gösterelim. $p \in U$ ve U açık olsun. $c_1 >> q$ bulabiliriz öyle ki $p \in B(p,c_1) \subset U$. Lemma 3.8' den bir n_0 bulabiliriz öyle ki $\frac{c}{n_0} << c_1$ dır. O halde $B(p,\frac{c}{n_0}) \subset B(p,c_1) \subset U$.

3.8. Önerme

(X,d) bir konik metrik uzay ve $T:(X,d) \to (X,d)$ bir dönüşüm olsun. T nin sürekli olması için gerek ve yeter koşul T nin dizisel sürekli olmasıdır.

İspat

$x_n \to x$ ve $q << c$ olsun. T, x de sürekli olduğundan $c_1 >> q$ bulabiliriz öyle ki $T(B(x,c_1)) \subset B(Tx,c)$. $x_n \to x$ olduğundan en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulabiliriz öyleki $\forall n \geq n_0$ için $d(x_n,x) << c_1$. O halde, $\forall n \geq n_0$ için $d(Tx_n,Tx) << c$. (X,d) birinci sayılabilir topolojik uzay olduğundan tersi doğrudur.

3.9. Önerme

(X,d) bir konik metrik uzay ve $T:(X,d) \to (X,d)$ dizisel sürekli bir dönüşüm olsun. $\forall A \subset X$ için $T\overline{A} \subset \overline{TA}$.

İspat

Önerme 3.8' den dizisel sürekli bir dönüşüm süreklidir. Her $A \subset X$ için $TA \subset \overline{TA}$ dır. Dolayısıyla $A \subset T^{-1}(TA) \subset T^{-1}(\overline{TA})$ dır. $\overline{TA}$ kapalı ve T sürekli olduğundan $T^{-1}(\overline{TA})$ dır ve X de kapalı ve A kümesini kapsıyor. Halbuki A yı kapsayan en dar küme $\overline{A}$ dır. $A \subset \overline{A} \subset T^{-1}(\overline{TA})$ olur. O halde $T\overline{A} \subset \overline{TA}$ olur.

3.11. Lemma

(X,d) bir konik metrik uzay ve $A \subset (X,d)$ dizisel kompakt olsun. Bu durumda en az bir $x_0, y_0 \in A$ var öyle ki $d(A) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\} = d(x_0, y_0)$.

İspat

Sabit bir $c >> q$, $c \in E$ için $d(A) - \frac{c}{n} < d(A)$ vardır. Supremum tanımından her $n \in ¥$, $x_n, y_n \in A$ bulabiliriz öyle ki $d(A) - \frac{c}{n} < d(x_n, y_n) \le d(A)$ dır. A dizisel kompakt olduğu için $x_n \to x_0 \in A$ ve $y_n \to y_0 \in A$ vardır. Lemma 3.5' den,

$$\lim_{n\to\infty}(d(A) - \frac{c}{n}) < \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \le d(A)$$

o halde $d(A) < \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \le d(A)$ olur. Bu durumda $(d(A) - \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)) \in P$ ve $(\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) - d(A)) \in P$ olur. $(P3)$' den $d(A) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x_0, y_0)$ olur.

3.2. Konik Metrik Uzayda Baire Kategori Teoremi

Bu kısımda konik metrik uzaylarda Baire kategori teoremini ispatlamak için baz temel tanım ve lemmalara yer verilecektir.

3.14. Tanım

(X,d) bir konik metrik uzayının boştan farklı iki alt kümesi A ve B olsun. A ile B arasındaki uzaklık $d(A,B)$ ile gösterilir ve $d(A,B)=\inf\{d(x,y): x\in A, y\in B\}$ ile tanımlanır. Eğer $A=\{a\}$ ise o zaman $d(A,B)$ yerine $d(a,B)$ kullanılır.

3.5. Örnek

$$E=\mathbb{R}^2,\ P=\{(x,y)\in E\ :x,\ y\geq 0\},\ d:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to E$$

$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2))=(|x_1-y_1|,|x_2-y_2|)$$

olsun.

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1\}$$

$$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2\leq x\leq 3,\ 0\leq y\leq 1\}$$

$$C=\{(0,0)\},\ D=\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$$

olsun. Bu durumda $d(A,B)=(1,0)$, $d(A,C)=(0,0)$, $d(C,B)=(2,0)$.

3.6. Örnek

$$E=\mathbb{R}^2,\ P=\{(x,y)\in E\ :x,y\geq 0\},\ d:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to E$$

$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2))=(|x_1-y_1|,|x_2-y_2|)$$

olmak üzere

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ \ 2 \le y \le 3\}$

$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3 \le x \le 4,\ \ 0 \le y \le 3\}$

olsun. Bu durumda,

$d(A, B) = (2,1)$.

3.12. Lemma

$c_1, c_2 \in P$ olsun. Her $q << c$ için $c_1 < c_2 + c$ ise $c_1 \le c_2$ dir.

İspat

Her $q << c$ için $c_1 < c_2 + c$ olsun. $q << c$ ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\frac{c}{n} >> q$ dir. $c_1 < c_2 + c$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $c_1 < c_2 + \frac{c}{n}$ olur. $(c_2 + \frac{c}{n} - c_1) \ge q$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için, $(c_2 + \frac{c}{n} - c_1) \in P$, olur. $n \to \infty$ için,

$$\left\| \ c_2 + \frac{c}{n} - c_1 - (c_2 - c_1) \ \right\| = \left\| \ \frac{c}{n} \ \right\| = \frac{\|c\|}{n} \to 0$$

olur. O halde, $(c_2 + \frac{c}{n} - c_1) \to (c_2 - c_1) \in P$. P kapalı olduğundan $(c_2 - c_1) \in P$. O halde $c_1 \le c_2$.

3.2. Teorem

K normal sabit ile (X,d) bir konik metrik uzay ve A, X in boştan farklı alt kümesi olsun. $x \in \overline{A}$ olması için gerek ve yeter koşul $d(x,A)=\theta$ olmasıdır.

İspat

$x \in \overline{A}$ olsun. $\theta \ll c$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $B\left(x,\frac{c}{n}\right) \cap A \neq \phi$. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için en az bir $a_n \in A$ var öyle ki $\theta \leq d(x,A) \leq d(x,a_n) < \frac{c}{n}$. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\| \; d(x,A) \; \| \leq K \frac{\|c\|}{n}.$$

O halde $d(x,A)=\theta$.

Tersine $U \in \tau_c$ ve $x \in U$ olsun. U , konik metrik uzayda açık bir küme olduğundan $B(x,c) \subset U$ olacak şekilde bir $\theta \ll c$ vardır. $\theta = d(x,A) < c$ olduğundan $d(x,a) < c$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır. O halde $a \in (A \cap B(x,c)) \subset A \cap U$.

3.2. Not

Teorem 3.2 de $A \subset (X,d)$ kapalı bir alt küme ve $x \notin A$ ise $d(x,A) > \theta$ olur.

3.3. Teorem

Her (X,d) konik metrik uzayı bir $T_4 -$uzaydır.

İspat

İlk olarak (X,d) konik metrik uzayının Hausdorff uzay olduğunu gösterelim. Böylece, T_1-uzay olur. $x,y\in X$ için, $x\neq y$ iki nokta olsun. Bu durumda $d(x,y)=c>\theta$. O halde

$$B(x,\frac{c}{2})\cap B(y,\frac{c}{2})=\phi .$$

O zaman (X,d) Hausdorff uzaydır. Şimdi normal uzay olduğunu göstereceğiz. $A,\ B\subset X$, $A,\ B$ kapalı ve $A\cap B=\phi$ olsun.

$$U=\{x\in X : d(x,A)<d(x,B)\}$$
$$V=\{x\in X : d(x,A)>d(x,B)\}$$

olsun. V ve U nun tanımından $U\cap V=\phi$. Eğer $a\in A$ ise $d(a,A)=\theta$ ve $a\notin B$ ise B kapalı olduğundan $d(a,B)>\theta$. Teorem 3.2'den $\theta=d(a,A)<d(a,B)$. O halde $a\in U$ ve $A\subset U$ olur. Eğer $b\in B$ ise $d(b,B)=\theta$ ve $b\notin A$ ise A kapalı olduğundan $d(b,A)>\theta$ olur. Teorem 3.2'den $\theta=d(b,B)<d(b,A)$ ve $b\in V$ olur ve böylece $B\subset V$ dır. Şimdi U ve V nin açık kümeler olduğunu gösterirsek ispat biter. U nun açık bir küme olduğunu gösterelim. $x_0\in U$ ise $c_1=d(x_0,A)<d(x_0,B)=c_2$ olur. O halde $(c_2-c_1)>\theta$ dır. yani $c_1\neq c_2$ ve $(c_2-c_1)\in P$ dir. $c=\frac{1}{2}(c_2-c_1)$ tanımlayalım ve $B(x_0,\frac{c}{2})$ açık yuvarını düşünelim.

$$x\in B(x_0,\frac{c}{2})$$

olsun. Her $s\gg\theta$ için $d(x_0,A)$ nın tanımından en az bir $a\in A$ öyle ki $d(x_0,a)<c_1+s$ dır. Böylece

$$d(x,A) \le d(x,a) \le d(x,x_0) + d(x_0,a) < \frac{c}{2} + c_1 + s = (\frac{c}{2} + c_1) + s$$

Lemma 3.12' den $d(x,A) \le \frac{c}{2} + c_1 = \frac{1}{4}(c_2 + 3c_1)$ olduğu görülür. Aynı zamanda her $b \in B$ için $d(b,x_0) \le d(b,x) + d(x,x_0)$ olur. $d(b,x_0) \ge d(x_0,B)$ ve $d(x,x_0) < \frac{c}{2}$ olduğundan $d(b,x) + \frac{c}{2} > d(x_0,B) = c_2$ yazabiliriz. Böylece,

$$d(b,x) > c_2 - \frac{c}{2} = \frac{1}{4}(3c_2 + c_1).$$

$c_2 + 3c_1 < 3c_2 + c_1$ olduğundan $d(x,A) < d(x,B)$ olur. Bu durumda $x \in U$ ve U açık bir kümedir.

V nin açık bir küme olduğunu gösterelim. $x_0 \in V$ ise $c_1 = d(x_0,A) > d(x_0,B) = c_2$ olur. O zaman $(c_1 - c_2) > q$. Yani $(c_1 - c_2) \in P$, $c_1 \ne c_2$. $c = \frac{1}{2}(c_1 - c_2)$ tanımlayalım ve $B(x_0, \frac{c}{2})$ açık yuvarını düşünelim. $x \in B(x_0, \frac{c}{2})$ olsun. Her $s >> q$ için $d(x_0,B)$ nın tanımından en az bir $b \in B$ var öyle ki $d(x_0,b) < c_2 + s$ dir. Böylece

$$d(x,B) \le d(x,b) \le d(x,x_0) + d(x_0,b) < \frac{c}{2} + c_2 + s = (\frac{c}{2} + c_2) + s.$$

Lemma 3.12'den $d(x,B) \le \frac{c}{2} + c_2 = \frac{1}{4}(c_1 - c_2) + c_2 = \frac{1}{4}(c_1 + 3c_2)$ olduğu görülür. Aynı zamanda her $a \in A$ için $d(a,x_0) \le d(a,x) + d(x,x_0)$ olur. $d(a,x_0) \ge d(x_0,A)$ ve $d(x,x_0) < \frac{c}{2}$ olduğundan $d(a,x) + \frac{c}{2} > d(x_0,A) = c_1$ yazabiliriz. Böylece

$$d(a,x) > c_1 - \frac{c}{2} = c_1 - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(c_1 - c_2)) = \frac{1}{4}(3c_1 + c_2)\ .$$

$c_1 + 3c_2 < 3c_1 + c_2$ olduğundan $d(x,A) > d(x,B)$ olur. Bu durumda $x \in V$ ve V açık bir kümedir.

3.15. Tanım

(X, t_c) topolojik uzayının bir alt kümesi M olsun.

(i) Eğer $\dot{I}\text{ç}(\overline{M}) = f$ ise M ye X de hiçbir yerde yoğun değil denir.

(ii) Eğer M kümesi X de hiçbir yerde yoğun olmayan kümelerin sayılabilir bir birleşimi ise birinci kategoridendir (Meager) denir.

(iii) Eğer X de M birinci kategoriden değil ise M ye ikinci kategoriden (Meager değil) denir.

3.13. Lemma

(X,d) bir konik metrik uzay ve normal sabit K ile P bir normal konik olsun. Her $n \in$ ¥ için $b \leq a_n$ ve $a_n \to a$ olacak şekilde bir $a_n \in E$ varsa $b \leq a$ dır.

İspat

Her $n \in$ ¥ için $b \leq a_n$ olsun. Bu durumda $(a_n - b) \in P$ olur. $a_n \to a$ olduğundan, $\lim_{n\to\infty}(a_n - b) = (a-b) \in P$ olur. P kapalı olduğundan $(a-b) \in P$ olur. O halde $b \leq a$ dır.

3.4. Teorem (Baire kategori teoremi)

Her boştan farklı tam konik metrik uzay ikinci kategoridendir. Yani $X = \mathbf{U}_{k=1}^{\infty} M_k$, M_k kapalı ise boş olmayan en az bir açık alt küme içerir.

İspat

(X,d) bir tam konik metrik uzayı birinci kategoriden olsun. X de her biri yoğun olmayan M_k ile $X=\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ dir. X de limiti x olan bir Cauchy dizisini oluşturalım ve bu limit M_k da olmasın. Böylece bir çelişki elde edilecektir. Kabulümüzden M_1, X de yoğun değildir ve $\overline{M_1}$ tanımdan boştan farklı açık bir küme içermez. Fakat X içerir. Bu $\overline{M_1} \neq X$ demektir. O zaman, $x_1 \in X-\overline{M_1}$ ve $c_1 < \frac{c}{2}$ olacak şekilde $B_1 = B(x_1,c_1)$ bir açık yuvar seçelim. Burada $c \in İçP$ bir sabittir. Kabulümüzden M_2 X 'de yoğun değil ve $\overline{M_2}$ tanımdan boştan farklı açık küme içermez. O zaman, $B(x_1,\frac{c_1}{2})$ açık yuvarını da içermez. Bu da $\overline{M_2}^c \cap B(x_1,\frac{c_1}{2})$ nin boştan farklı ve açık olmadığını gösterir. $c_2 < \frac{c_1}{2}$ olmak üzere $B_2 = B(x_2,c_2) \subset \overline{M_2}^c \cap B(x_1,\frac{c_1}{2})$ olacak şekilde bir $B_2(x_2,c_2)$ açık yuvarını seçebiliriz. Tümevarım ile $B_k \cap M_k$ olacak şekilde bir $B_k = B(x_k,\frac{c_k}{2})$, $c_k < \frac{c}{2^k}$ açık yuvarlarının bir dizisini oluşturabiliriz. $B_{k+1} \subset B(x_k,\frac{c_k}{2}) \subset B_k$, $k=1,2,3,...$ olan B_k yuvar dizisi oluşturabiliriz. $c_k < \frac{c}{2^k}$ olduğu için yuvarların merkezlerinin x_k dizileri bir Cauchy dizisidir. X tam olduğundan $x_k \to x \in X$ dir. Her m ve $n > m$ için $B_n \subset B(x_m,\frac{c_m}{2})$ dır. Lemma 3.12 yardım ile eğer $n \to \infty$ iken her m için $x \in B_m$. $B_m \subset \overline{M_m}^c$ olduğu için her m için $x \notin M_m$, yani $x \notin X = \bigcup_{m=1}^{\infty} M_m$. Bu ise bir çelişkidir. O halde $x \in X$ dır.

3.3. Konik Normlu Uzaylar

Bu kısımda konik normlu uzaylar ve konik Banach uzaylar tanımları verilecek ve bu uzaylar üzerinde bazı yeni tanımlar ve teoremler elde edilecektir.

3.16. Tanım

X bir ¡ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve E bir reel Banach uzay olsun. $\|.\|_c : X \to E$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve her $a \in$ ¡ için

C1) $q < \|x\|_c$;

C2) $\|x\|_c = q \Leftrightarrow x = q$;

C3) $\|a.x\|_c = |a|\|x\|_c$;

C4) $\|x+y\|_c \leq \|x\|_c + \|y\|_c$;

özelliklerini sağlıyorsa $\|.\|_c$ ifadesine X üzerinde konik norm $\left(X, \|.\|_c\right)$ ikilisine bir konik normlu uzay denir.

3.10. Önerme

Her konik normlu uzay konik metrik uzaydır. Üstelik, $d : X \times X \to E$ $d(x,y) = \| \; x - y \; \|_c$ şeklinde tanımlanır.

İspat

Her $x, y, z \in X$ için,

d1) $d(x,y) = q \Leftrightarrow \|x-y\|_c = q \Leftrightarrow x - y = q \Leftrightarrow x = y$.

d2) $d(x,y) = \|x-y\|_c = \|-(y-x)\|_c$ olur. (C3) den $\|y-x\|_c = d(y,x)$.

d3) $d(x,y)=\|x-y\|_c=\|x-z+z-y\|_c$ olur. (C4) ' den

$\|x-z+z-y\|_c \le \|x-z\|_c+\|z-y\|_c=d(x,z)+d(z,y)$.

3.3. Not

Konik normlu uzayda yakınsaklık normdan indirgenmiş konik metrik ile tanımlanır. Örneğin her $q<<c$ için n_0 vardır öyle ki her $n>n_0$ için $d(x_n,x)=\|x_n-x\|_c<<c$ ise $x_n\in X$ dizisi $x\in X$ e yakınsak denir. Dolayısıyla [25] ten $x_n\to x$ ancak ve ancak $n\to\infty$ için $\|d(x_n,x)\|=\|\ \|x_n-x\|_c\|\to 0$.

3.17. Tanım

$(X,\|.\|_c)$ konik normlu uzay ve $x_n\in X$ olsun. Her $q<<c$ için en az bir n_0 var öyle ki her $n,m>n_0$ için

$$d(x_n,x_m)=\|x_n-x_m\|_c<<c$$

ise $\{x_n\}$ dizisine X içinde bir Cauchy dizisi denir. Denk olarak

$$\lim_{m,n\to\infty}\|d(x_n,x_m)\|=\lim_{n,m\to\infty}\|\ \|x_n-x_m\|_c\|=0.$$

3.18. Tanım

$(X,\|.\|_c)$ konik normlu uzay olsun. X içinde her Cauchy dizisi X de bir noktaya yakınsak ise $(X,\|.\|_c)$ konik normlu uzayına konik Banach uzayı denir.

3.7. Örnek

$\left(E,\|.\|_c\right)$, $E=\mathbb{R}^2$, $P=\{(x,y)\in E: x\geq 0,\ y\geq 0\}$ olsun. $a,b>0$ olmak üzere $\|(x,y)\|_c=(a|x|,b|y|)$ ile tanımlı $\|.\|_c$ fonksiyonu $\left(E,\|.\|_c\right)$ bir konik normlu uzay ve konik Banach uzaydır.

Gerçekten,

C1) $\|(x,y)\|_c>\theta$ olur. $\|(x,y)\|_c=\theta \Leftrightarrow (a|x|,b|y|)=(0,0)\Leftrightarrow a|x|=0$ ve $b|y|=0\Leftrightarrow x=0,\ y=0\Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$.

C2) $\|\lambda(x,y)\|_c=\|(\lambda x,\lambda y)\|_c=(|\lambda a x|,|\lambda b y|)=|\lambda|(a x,b y)=|\lambda|\ \|(x,y)\|_c$.

C3) $\|(x,y)+(z,w)\|_c=\|x+z,y+w\|_c=(a|x+z|,b|y+w|)\leq(a|x|+a|z|,b|y|+b|w|)$
$=(a|x|,b|y|)+(a|z|,b|w|)=\|(x,y)\|_c+\|(z,w)\|_c$.

O halde $\|.\|_c$ bir konik normlu uzaydır.

Şimdi konik Banach uzay olduğunu gösterelim.

$z_n=(x_n,y_n)\in\mathbb{R}^2$ bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda

$$\lim_{m,n\to\infty}\left\|\,\|z_n-z_m\|_c\right\|=\lim_{m,n\to\infty}\left\|\,\|x_n-x_m,y_n-y_m\|_c\right\|=\lim_{m,n\to\infty}\left\|(a|x_n-x_m|,b|y_n-y_m|)\right\|$$

$$=\lim_{m,n\to\infty}\sqrt{a^2|x_n-x_m|^2+b^2|y_n-y_m|^2}=0.$$

O halde $m,n \to \infty$ için $|x_n - x_m| \to 0,\ |y_n - y_m| \to 0$. ¡ cisminde $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ Cauchy dizileridir. ¡ tam olduğundan $|x_n - x| \to 0$ ve $|y_n - y| \to 0$ olacak şekilde $x, y \in$ ¡ sayıları vardır. Konik normlu uzayda $z_n \to z$ olduğunu gösterelim.

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \|z_n - z\|_c \right\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \|(x_n - x, y_n - y)\|_c \right\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \left(a|x_n - x|, b|y_n - y|\right) \right\|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{a^2 |x_n - x|^2 + b^2 |y_n - y|^2} = 0 .$$

O halde $(E, \|.\|_c)$ tamdır.

3.11. Önerme

Her konik normlu uzay topolojik uzaydır.

İspat

Teorem 3.1'den her konik metrik uzay topolojik uzay ve her konik normlu uzay konik metrik uzaydır.

4. SABİT NOKTA TEOREMLERİ

4.1. Konik Metrik Uzaylarda Çapsal Büzülebilir ve Sabit Nokta Teoremleri

Metrik uzaylarda çapsal büzülebilir dönüşümü ilk olarak Xu. H. K, tarafından verilmiştir. Yazar bu çalışmasında metrik uzaylarda bazı sabit nokta teoremleri vermiştir [49].

Bu kısımda konik metrik uzaylarda çapsal büzülebilir dönüşümü tanımlayarak bazı sabit nokta teoremleri ispatı verilecektir.

4.1. Tanım

(X,d) bir tam konik metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $a \in [0,1)$ olsun. $\forall x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) < d(x,y)$$

ise T ye büzülebilir dönüşüm ve

$$d(Tx,Ty) \leq a \ d(x,y)$$

ise T ye büzülme dönüşümü denir.

4.2. Tanım

(X,d) bir konik metrik uzay, $L \geq 0$ ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq L \, d(x,y)$$

koşulu sağlanıyorsa T dönüşümüne Lipschitz dönüşümü denir ve L ye Lipschitz sabiti denir.

4.3. Tanım

(X, d) bir tam konik metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $q < d(A)$ olacak şekilde X in her sınırlı, kapalı A alt kümesi için

$$d(TA) < d(A)$$

oluyorsa, T dönüşümüne çapsal büzülebilir dönüşüm denir.

($d(A) = sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$ sayısına A nın çapı denir).

4.1. Önerme

(X, d) bir konik metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. T çapsal büzülebilir dönüşüm ise büzülebilir dönüşümdür.

İspat

$T : X \rightarrow X$ çapsal büzülebilir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in X$ ve $x \neq y$ için $A = \{x, y\}$ diyelim. A kümesi X nın kapalı bir alt kümesi ve $q < d(A) < d(x, y)$ olsun. O halde T çapsal büzülebilir olduğundan $d(TA) < d(A)$ dır. $TA = T\{x, y\} = \{Tx, Ty\}$ olduğundan $d(TA) = d(Tx, Ty) < d(A) = d(x, y)$ olur. Yani $\forall x, y \in X$, $x \neq y$ için $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ olur.

4.1. Teorem

(X,d) bir tam konik metrik uzay, K normal sabiti ile P bir normal konik ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $d(Tx,Ty) \leq kd(x,y)$ $\forall x,y \in X$, $k \in [0,1)$ ise T bir tek $x \in X$ sabit noktasına sahiptir. Üstelik herhangi bir $x \in X$ için $\{T^n x\}$ iterasyon dizisi yakınsaktır [25].

4.2. Önerme

(X,d) bir tam konik metrik uzay, K normal sabiti ile P bir normal konik olsun. En az bir pozitif n tam sayısı için $T: X \to X$ P dönüşümü ve $k \in [0,1)$ olmak üzere her $x,y \in X$ için

$$d(T^n x, T^n y) \leq kd(x,y)$$

koşulunu sağlıyorsa, T bir tek sabit noktaya sahiptir [25].

4.2. Teorem

(X,d) bir dizisel kompakt konik metrik uzay, K normal sabiti ile P bir normal konik ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. T dönüşümü büzülebilme koşulunu sağlıyor (yani her $x,y \in X$, $x \neq y$ için $d(Tx,Ty) < d(x,y)$) ise T, X içinde bir tek sabit noktaya sahiptir [25].

4.1. Not

Rezapour ve Hamlbarani, Teorem 4.1, Teorem 4.2 ve Önerme 4.2 ifadelerinde P nin normal konik kavramını kaldırarak tekrar ispatlamışlardır [39].

4.1. Örnek

$E = \mathbb{R}^2,\ P = \{(x,y) \in E : x \geq 0,\ \ y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$

$X = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(0,x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$

$d : X \times X \to E$

$d((x,0),(y,0)) = (\frac{4}{3}|x-y|, |x-y|)$,

$d((0,x),(0,y)) = (|x-y|, \frac{2}{3}|x-y|)$,

$d((x,0),(0,y)) = d((0,y),(x,0)) = (\frac{4}{3}x + y, x + \frac{2}{3}y)$ olur. Bu durumda (X,d) bir tam konik metrik uzaydır. $T : X \to X$, $T((x,0)) = (0,x)$, $T((0,x)) = (\frac{1}{2}x,0)$ olur ve T büzülebilme koşulunu sağlar. Yani $\forall (x_1,x_2),(y_1,y_2) \in X$ için

$d(T(x_1,x_2),T(y_1,y_2)) \leq kd((x_1,x_2),(y_1,y_2))$

olur. Burada $k = \frac{3}{4} \in [0,1)$ dir. T bir tek $(0,0) \in X$ sabit noktasına sahiptir fakat T dönüşümü metrik uzayda büzülebilir değildir [25].

4.3. Teorem

(X,d) bir dizisel kompakt konik metrik uzay ve $T : X \to X$ çapsal büzülebilir dönüşüm ise T bir sabit noktaya sahiptir.

İspat

$F=\{A\subset X: A,\ X$ in boştan farklı dizisel kompakt alt kümesi, ve $T-$invaryant$\}$ olsun. $TA\subset A$ ise $T-$ invaryanttır. X dizisel kompakt ve $TX\subset X$ olduğundan $F\neq\phi$ ve $x\in F$. F ailesi, $A_1, A_2\in F$ olmak üzere, $A_1\leq A_2$ ancak ve ancak $A_1\subset A_2$ ile kısmi sıralıdır. F deki her S zinciri sonlu arakesit özellğine sahiptir. Dizisel kompaktlık, kompaktlığı gerektirdiğinden $B=\bigcap\{A: A\in S\}\neq\phi$ kümesi F ye aittir. Dolayısıyla $B\neq\phi$ dır. B dizisel kompakt ve

$$TB=T\bigcap\{A: A\in S\}\subset\bigcap\{TA: A\in S\}\subset\{A: A\in S\}=B.$$

Açıkça $B,\ F$ için bir alt sınırdır. Zorn Lemmasından $A\in F$ minimal eleman olsun. $A_0=TA$ olarak alalım. Kompakt kümenin sürekli görüntüsü kompakt olduğundan ve $T-$ invaryant olduğundan $TA_0\subset TA=A_0$ dır ve A_0 kompakttır. Yani $A\in F$ dır. A minimal olduğundan $A_0=A$ olmak zorundadır. Dolayısıyla $A=TA$ dır. O halde $d(A)=d(TA)$ dır. T çapsal büzülebilir olduğundan $d(A)=\theta$ dır. Yani A nın en az bir z noktası vardır. $A,\ T$ invaryant olduğundan $Tz=z$ dır.

Yukarıdaki Teorem 4.3 ispatı genelleştirilemez. Her bir $\{T^n x\}$ yörüngesinin z noktasına yakınsak olup olmadığı bilinmiyor. Eğer çapsal büzülebilir dönüşüm daha kuvvetli olan asimptotik çapsal büzülebilir dönüşüm ile yer değiştirirse, T sınırlı yörüngeye sahip olduğunda her zaman T nin bir sabit noktaya sahip olduğu gösterilecektir. E de $\sup\{d(T^n x, T^m x): m,n\in\mathbb{N}\}$ mevcut ise bir $\{T^n x\}$ yörüngesine sınırlıdır denir.

4.4. Tanım

(X,d) tam konik metrik uzay, $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $q<d_a\{A_n\}$ ve $d_a(\{TA_n\})<d_a(\{A_n\})$ olacak şekilde X in her artmayan $\{A_n\}$ kapalı ve sınırlı küme dizisi varsa T dönüşümüne asimptotik çapsal büzülebilir denir ($d_a(A_n)=\lim_{n\to\infty} d(A_n)$, $\{A_n\}$nın asimptotik çapı).

4.1. Önerme

Eğer $T:X\to X$ asimptotik çapsal büzülebilir dönüşüm ise T çapsal büzülebilir dönüşümdür.

İspat

Her $n\in\mathbb{N}$ için $A_n=A$ olsun. $d(TA)=\lim_{n\to\infty} d(TA_n)=d_a(TA_n)$ asimptotik çapsal büzülebilir olduğundan $d_a(TA_n)<d_a(A_n)=\lim_{n\to\infty} d(A_n)=d(A)$. O halde

$$d(TA)<d(A)$$

olur.

4.2. Önerme

(X,d) bir dizisel kompakt konik metrik uzay ve $T:X\to X$ bir büzülebilir dönüşüm olsun. Bu durumda T asimptotik çapsal büzülebilir dönüşümdür.

İspat

$\{A_n\} \subset (X,d)$ bir kapalı, sınırlı ve artmayan dizi ve $d_a(A_n) = \lim_{n\to\infty} d(A_n) > q$ olsun. (X,d) kompakt (dizisel kompakt) olduğundan her bir $\{A_n\}$ kompakttır (dizisel kompakt). T sürekli olduğu için TA_n kompakttır. Kompaktlıktan ve Lemma 3.11' den $x_n, y_n \in A_n$ seçebiliyoruz öyle ki

$$d(Tx_n, Ty_n) = d(\{TA_n\}).$$

$\{A_n\}$ bir artmayan ve kompakt dizi olduğu için $x_n \to x$, $y_n \to y$ vardır. T sürekli olduğundan ve aynı zamanda Lemma 3.3' den

$$d_a(TA_n) = \lim_{n\to\infty} d(TA_n) = \lim_{n\to\infty} d(Tx_n, Ty_n) = d(Tx, Ty).$$

Eğer $x = y$ ise $d_a(TA_n) = d(Tx,Ty) = q < d_a(\{A_n\})$.
Eğer $x \neq y$ ise

$$d_a(TA_n) = d(Tx,Ty) < d(x,y) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \leq \lim_{n\to\infty} \sup\{d(x,y) : x,y \in A_n\} = \lim_{n\to\infty} d(\{A_n\}) = d_a(\{A_n\}).$$

4.1. Lemma

(X,d) bir konik metrik uzay, P kuvvetli minihedral ve $A \subset X$ sınırlı olsun. Bu durumda $d(A) = d(\overline{A})$.

İspat

P kuvvetli minihedral ve $A \subset \overline{A}$ olduğundan $d(A) < d(\overline{A})$.

Tersine $x, y \in \overline{A}$ olsun. Önerme 3.7 den (X, d) birinci sayılabilir topolojik uzay olduğundan en az $x_n, y_n \in A$ var öyle ki $x_n \to x$, $y_n \to y$. Lemma 3.3' den ve P kapalı olduğundan

$$d(x, y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \le d(A).$$

P kuvvetli minihedral konik ve $x, y \in A$ herhangi iki eleman olduğu için $d(\overline{A}) < d(A)$. O halde $d(A) = d(\overline{A})$ olur.

4.4. Teorem

(X, d) bir tam konik metrik uzay, P kuvvetli minihedral konik ve $T : X \to X$ bir asimptotik çapsal büzülebilir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki bazı $x_0 \in X$ için T nin $\{T^n x_0\}_{n=0}^{\infty}$ ile sınırlı yörüngesi olsun. O zaman $z \in X$, T nin bir tek sabit noktasıdır ve her $x \in X$ için $\{T^n x_0\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi z ye yakınsar.

İspat

T büzülebilir dönüşüm olduğundan bir $\{T^n x_0\}$ yörüngesinin sınırlı olması tüm $\{T^n x\}$ yörüngelerinin sınırlı olmasını gerektirir. $n \ge 0$ için

$$A_n = \{T^m x : m \ge n\} = \{T^n x, T^{n+1} x, \ldots\}$$

olsun. Her $n \ge 1$ için $A_n = TA_{n-1}$ olsun. O zaman T nin sürekliliği, Teorem 3.1 ve Lemma 4.1' den

$$d_a(\{\overline{A_n}\}) = d_a(\{A_n\}) = d_a(\{TA_{n-1}\}) = d_a(\{TA_n\}) = d_a(\{T\overline{A}\}).$$

T asimptotik çapsal büzülebilir dönüşüm olduğundan $d_a(\{A_n\}) = q$. Bu demektir ki $\{T^n x\}$ bir Cauchy dizisidir ve yakınsaktır. $z = \lim_{m\to\infty} T^m x$ olsun. $T(T^m x) \to Tz$, $T^{m+1}x \to z$ ve her metrik uzay $T_1 -$ uzayı olduğundan $Tz = z$.

Sabit noktanın tekliği T nin büzülebilirliğinden açıktır.

4.2. Konik Metrik Uzaylarda Genelleştirilmiş Büzülme Dönüşümleri

Sabit nokta teorisinde çok önemli olan genelleştirilmiş büzülme dönüşümleri ilk olarak Ćirić vermiştir [14]. Son yıllarda J. Gornicki, ve B. E. Rhoades ortak sabit nokta teoremleri elde etmek için genelleştirilmiş büzülme dönüşümlerini kullanmışlardır [23]. Genelleştirilmiş büzülme dönüşümleri değişik yazarlar tarafından çalışılmıştır [3, 4, 15, 16, 31-34, 36, 37, 40, 45].
Ćirić'in bazı temel sonuçları bu bölümde, genelleştirilmiş büzülme dönüşümleri için konik metrik uzaylarda bir sabit teoremi ve bir ortak sabit nokta teoremi olarak ispatlandı [14, 15].

4.2.1. Genelleştirilmiş büzülme dönüşümleri için sabit nokta teoremleri

Bu kısımda konik metrik uzaylarda genelleştirilmiş büzülme dönüşümleri için bir sabit nokta teoremi ispatlanmıştır.

(X,d) bir konik metrik uzay ve $x_1, x_2 \in X$ olsun. x_1, x_2 arasındaki skaler uzaklık $d_c(x_1,x_2) = \| \ d(x_1,x_2) \ \|$ ile tanımlanır.

4.3. Teorem

(X,d), $K \geq 1$ normal sabit ile bir tam konik metrik uzay ve $T : X \to X$ dönüşümü $a, b, g, d : X \times X \to [0,1)$ ve

$$l = \sup\{a(x,y) + b(x,y) + g(x,y) + 2Kd(x,y)\} < 1 \tag{4.1}$$

olmak üzere, her $x, y \in X$ için

$$d_c(Tx,Ty) \le a(x,y)\, d_c(x,y) + b(x,y)\, d_c(x,Tx) + g(x,y)\, d_c(y,Ty)$$

$$+ d(x,y)\left[d_c(x,Ty) + d_c(y,Tx)\right], \tag{4.2}$$

koşulunu sağlasın. O zaman,

(i) $u \in X$ olacak şekilde T bir tek sabit noktaya sahiptir.

(ii) Her $x \in X$ için $n \to \infty$ için $T^n x \to u$.

(iii) $d_c(T^n x, u) \le \dfrac{l^n}{1-l} d_c(x,Tx)$.

İspat

Sabit bir $x \in X$ noktası seçelim. $\{x_n\}$ dizisini $x_0 = x$, $x_1 = Tx_0$, $x_2 = Tx_1, \ldots,$ $x_{n+1} = Tx_n$, … ile tanımlayalım. Eş. 4.2' den

$$d_c(x_n, x_{n+1}) = d_c(Tx_{n-1}, Tx_n)$$

$$\le a\, d_c(x_{n-1}, x_n) + b\, d_c(x_{n-1}, x_n) + g\, d_c(x_n, x_{n+1}) + d\left[d_c(x_{n-1}, x_{n+1}) + d_c(x_n, x_n)\right]$$

veya

$$d_c(x_n, x_{n+1}) = d_c(Tx_{n-1}, Tx_n)$$

$$\le a\, d_c(x_{n-1}, x_n) + b\, d_c(x_{n-1}, x_n) + g\, d_c(x_n, x_{n+1}) + d\, d_c(x_{n-1}, x_{n+1}). \tag{4.3}$$

Burada a, b, g ve d, (x_{n-1}, x_n) noktasında değer alan fonksiyonlardır. Üçgen eşitsizliğinden

$$d(x_{n-1}, x_{n+1}) \le d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1}) \tag{4.4}$$

dur. Dolaysıyla

$$\begin{aligned} d_c(x_{n-1}, x_{n+1}) &\le K \left\| d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1}) \right\| \\ &\le K\left[d_c(x_{n-1}, x_n) + d_c(x_n, x_{n+1}) \right] \\ &\le 2K \max\left\{ d_c(x_{n-1}, x_n), d_c(x_n, x_{n+1}) \right\} \end{aligned} \tag{4.5}$$

Eş. 4.5'den Eş. 4.3,

$$d_c(x_{n-1}, x_{n+1}) \le (a + b + g)\max\left\{ d_c(x_{n-1}, x_n), d_c(x_n, x_{n+1}) \right\} + 2Kd \max\left\{ d_c(x_{n-1}, x_n), d_c(x_n, x_{n+1}) \right\}$$

eşitsizliğine dönüşür. O zaman

$$d_c(x_n, x_{n+1}) \le l \max\left\{ d_c(x_{n-1}, x_n), d_c(x_n, x_{n+1}) \right\}$$

dir. $l < 1$ olduğundan

$$d_c(x_n, x_{n+1}) \le l\, d_c(x_{n-1}, x_n) \tag{4.6}$$

dir. Tümevarım ile

$$d_c(x_n, x_{n+1}) \le l\, d_c(x_{n-1}, x_n) \le l.l\, d_c(x_{n-2}, x_{n-1}) \le \ldots \le l^n d_c(x, Tx) \tag{4.7}$$

elde edilir.

Konik metriğin üçgen eşitsizliğinden $m > n$ için

$$d\left(x_n, x_m\right) \leq d\left(x_n, x_{n+1}\right) + d\left(x_{n+1}, x_{n+2}\right) + \ldots + d\left(x_{m-1}, x_m\right) \tag{4.8}$$

elde edilir. Koniğin normal olması, Eş. 4.7 eşitsizliği, $\|.\|$ ve üçgen eşitsizliği sağlandığından

$$\begin{aligned} d_c\left(x_n, x_m\right) &\leq K\left[d_c\left(x_n, x_{n+1}\right) + d_c\left(x_{n+1}, x_{n+2}\right) + \ldots + d_c\left(x_{m-1}, x_m\right)\right] \\ &\leq K\left[l^n d_c\left(x, Tx\right) + l^{n+1} d_c\left(x, Tx\right) + \ldots + l^{m-1} d_c\left(x, Tx\right)\right] \\ &\leq \frac{l^n}{1-l} K d_c\left(x, Tx\right) \end{aligned}$$

veya

$$d_c\left(x_n, x_m\right) \leq \frac{l^n}{1-l} K d_c\left(x, Tx\right) \tag{4.9}$$

elde edilir. $m, n \to \infty$ için, Eş. 4.9 dan ve Lemma 3.2'den $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. (X, d) bir tam konik metrik uzay olduğundan $u \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} x_n = u \tag{4.10}$$

olur. Şimdi u nun T nin sabit noktası olduğunu gösterelim. Eş. 4.1 ve Eş. 4.2 den

$$d_c\left(Tu,Tx_n\right)\leq a\,d_c\left(u,x_n\right)+b\,d_c\left(u,Tu\right)+g\,d_c\left(x_n,Tx_n\right)+d\left[d_c\left(u,Tx_n\right)+d_c\left(x_n,Tu\right)\right]$$

$$\leq\left(a+b+g+2d\right)\max\left\{\begin{array}{c}d_c\left(u,x_n\right),d_c\left(u,Tu\right),\\ d_c\left(x_n,x_{n+1}\right),d_c\left(u,x_{n+1}\right),d_c\left(x_n,Tu\right)\end{array}\right\}$$

$$\leq l\max\left\{d_c\left(u,x_n\right),d_c\left(u,Tu\right),d_c\left(x_n,x_{n+1}\right),d_c\left(u,x_{n+1}\right),d_c\left(x_n,Tu\right)\right\},$$

olur. $n\to\infty$ için limit alırsak, Eş. 4.10 ve Lemma 3.3'den

$$d_c\left(Tu,u\right)\leq l\,d_c\left(Tu,u\right) \tag{4.11}$$

elde edilir. $l<1$ olduğu için $d_c\left(Tu,u\right)=0$ dir. Sonuç olarak $\left\|d\left(Tu,u\right)\right\|=0$ ve dolayısyla

$$d\left(Tu,u\right)=q$$

olur. Bu da $Tu=u$ olmasını gerektir.

Teklik için $x,y\in X$ ve $x\neq y$ olacak şekilde T nin iki sabit noktaya sahip olduğunu kabul edelim. Eş. 4.2 den

$$d_c\left(x,y\right)=d_c\left(Tx.Ty\right)\leq a\,d_c\left(x,y\right)+b\,d_c\left(x,Tx\right)+g\,d_c\left(y,Ty\right)+d\,d_c\left(x,Ty\right)+d\,d_c\left(y,Tx\right)$$

$$\leq\left(a+2d\right)d_c\left(x,y\right)$$

$$\leq l\,d_c\left(x,y\right)$$

olur. $l<1$ olduğu için $d_c\left(x,y\right)=0$ olur ve dolayısyla, $x=y$ dir. $x\in X$ keyfi olduğu için Eş. 4.10 dan (ii) elde edilir.

(iii) yi göstermek için Eş. 4.9 da $n \to \infty$ için limit alırsak Lemma 3.3' den her n için

$$d_c\left(T^n x, u\right) \le \frac{l^n}{1-l} d_c\left(x, Tx\right)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. Eş. 4.1 ve Eş. 4.2 yi sağlayan dönüşümlere genelleştirilmiş büzülme dönüşümü denir. Eş. 4.7 nin ispatından eğer T genelleştirilmiş büzülme dönüşümü ise o zaman T dönüşümü $l \in (0,1)$ ve her $x, y \in X$ için

$$d_c\left(Tx, Ty\right) \le l \max\left\{d_c\left(x, y\right), d_c\left(x, Tx\right), d_c\left(y, Ty\right), \tfrac{1}{2}\left[d_c\left(x, Ty\right) + d_c\left(y, Tx\right)\right]\right\} \quad (4.12)$$

sağlar.

Kannan aşağıdaki gibi tanımlanan (X, r) büzülme dönüşümünü metrik uzaylarda tanımlamıştır [29]. $0 < a < \dfrac{1}{2}$ olmak üzere

$$r\left(Tx, Ty\right) \le a\left[r\left(x, Tx\right) + r\left(y, Ty\right)\right], \quad (4.13)$$

Kannan'ın büzülebilir dönüşümü Eş. 4.13 sabit nokta teoremini ispatlamak için konik metrik uzaya taşımıştır. Eş. 4.13 ü sağlayan dönüşümler bir genelleştirilmiş büzülebilir dönüşümdür [29] .

Banach büzülme dönüşümünün sürekli olduğunu biliyoruz. Fakat genel olarak genelleştirilmiş büzülme dönüşümleri sürekli değildir.

Aşağıdaki örnekte, Kannan'ın dönüşümünün sürekli olmasını gerektirmez. Tam metrik uzayda verilen bu örnek aynı zamanda $K = 1$ normal sabiti ile tam konik metrik uzaydır.

4.2. Örnek

$X = [0,4]$ ve bunun üzerindeki metrik $r(x,y) = |y - x|$ olsun. $T : X \to X$ ile

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{3}, & x \le 3 \\ \dfrac{x}{4}, & 3 < x \le 4 \end{cases} \tag{4.14}$$

tanımlansın. $x, y \in [0,3]$ için

$$r(Tx,Ty) = \frac{1}{3}|x - Tx + Tx - Ty + Ty - y|$$

$$\le \frac{1}{3}\left[r(x,Tx) + r(Tx,Ty) + r(y,Ty) \right]. \tag{4.15}$$

Dolayısıyla

$$r(Tx,Ty) \le \frac{1}{2}\left[r(x,Tx) + r(y,Ty) \right]. \tag{4.16}$$

Benzer şekilde, aynı eşitsizlik $x, y \in (3,4]$ için geçerlidir. Şimdi, $x \in [0,3]$ ve $y \in (3,4]$ olsun. O zaman

$$r(Tx,Ty) = \left| \frac{x}{3} - \frac{y}{4} \right| \le 1 < 1.125 \le \frac{1}{2} r(y,Ty) \tag{4.17}$$

olur. Açıkça eşitsizlik $x \in (3,4]$ ve $y \in [0,3]$ için sağlanır. O zaman T, Eş. 4.13 ü sağlar, fakat T sürekli değildir [17].

4.5. Önerme

(X,d) tam konik metrik uzayındaki genelleştirilmiş büzülme dönüşümü T nin bir tek sabit noktası vardır ve bu noktada süreklidir.

İspat

Teorem 4.5' den biliyoruz ki T tek bir sabit noktaya sahiptir ve bu nokta $z \in X$ olsun. $n \to \infty$ için $y_n \to z$ olacak şekilde bir dizi $\{y_n\} \subset X$ olsun. $n \to \infty$ için $Ty_n \to Tz = z$ olduğunu göstereceğiz. Eş. 4.12 ve Lemma 3.3' den

$$d_c(Ty_n, Tz) \leq l \max\left\{ d_c(y_n, z), d_c(y_n, Ty_n), d_c(y, Ty), \frac{1}{2}\left[d_c(y_n, z) + d_c(z, Ty_n)\right]\right\}$$

$$\leq l\, d_c(y_n, z) + l\, d_c(Tz, Ty_n) \tag{4.18}$$

veya

$$d_c(Ty_n, Tz) - l\, d_c(Tz, Ty_n) \leq l\, d_c(y_n, z)$$

$$(1-l)\, d_c(Tz, Ty_n) \leq l\, d_c(y_n, z)$$

$$d_c(Tz, Ty_n) \leq \frac{l}{1-l} d_c(y_n, z) \tag{4.19}$$

elde edilir. $n \to \infty$ için, o zaman Eş. 4.19 ve Lemma 3.3'den (X,d)de $Ty_n \to Tz = z$. Sonuç olarak T, z sabit noktasında süreklidir. İspat tamamlanır.

4.2.2. Genelleştirilmiş büzülme dönüşümler için ortak sabit nokta teoremleri

Bu kısımda konik metrik uzaylarda genelleştirilmiş büzülme dönüşümleri için bir ortak sabit nokta teoremi ispatlanmıştır.

S boştan farklı bir küme $\{T_a\}_{a\in J}$, S den S ye tanımlanan dönüşümler ve J indis kümesi olsun. $u\in S$ noktasına $\{T_a\}_{a\in J}$, ailesi için bir ortak sabit nokta denir ancak ve ancak her T_a için $u=T_a u$.

4.6. Teorem

(X,d), $K\geq 1$ normal sabit ile tam konik metrik uzay olsun. $\{T_a\}_{a\in J}$, X üzerinde kendi kendine dönüşüm olsun. Eğer her $a\in J$ için $b\in J$ sabiti var ve

$$d_c\left(T_a x, T_b y\right)\leq l \max\left\{\begin{array}{l} d_c(x,y), d_c(x,T_a x), d_c\left(y,T_b y\right), \\ \frac{1}{2}\left[d_c\left(x,T_b y\right)+d_c(y,T_a x)\right] \end{array}\right\} \tag{4.20}$$

sağlanıyorsa $l=l(a)\in(0,1)$, $lK<1$ ve $x,y\in X$ için her T_a tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat

$a\in J$ ve $x\in X$ keyfi olsun. $x_0=x$, $x_{2n+1}=T_a x_{2n}$, $x_{2n+2}=T_b x_{2n+1}$, $n\geq 0$ dizisini ele alalım Eş. 4.20 den

$$d_c\left(x_{2n+1},x_{2n+2}\right)=d_c\left(T_a x_{2n},T_b x_{2n+1}\right)$$

$$\leq l \max\left\{\begin{array}{l} d_c\left(x_{2n},x_{2n+1}\right), d_c\left(x_{2n},x_{2n+1}\right), d_c\left(x_{2n+1},x_{2n+2}\right), \\ \frac{1}{2}\left[d_c\left(x_{2n},x_{2n+2}\right)+d_c\left(x_{2n+1},x_{2n+1}\right)\right] \end{array}\right\}$$

olur.

$$d\left(x_{2n}, x_{2n+2}\right) \leq d\left(x_{2n}, x_{2n+1}\right) + d\left(x_{2n+1}, x_{2n+2}\right)$$

$$\left\|d\left(x_{2n}, x_{2n+2}\right)\right\| \leq K\left[\left\|d\left(x_{2n}, x_{2n+1}\right)\right\| + \left\|d\left(x_{2n+1}, x_{2n+2}\right)\right\|\right]$$

$$d_c\left(x_{2n}, x_{2n+2}\right) \leq K\left[d_c\left(x_{2n}, x_{2n+1}\right) + d_c\left(x_{2n+1}, x_{2n+2}\right)\right] \tag{4.21}$$

olduğundan

$$\frac{1}{2} d_c\left(x_{2n}, x_{2n+2}\right) \leq \frac{1}{2} K\left[d_c\left(x_{2n}, x_{2n+1}\right) + d_c\left(x_{2n+1}, x_{2n+2}\right)\right]$$

$$\leq K \max\left\{d_c\left(x_{2n}, x_{2n+1}\right), d_c\left(x_{2n+1}, x_{2n+2}\right)\right\},$$

ve

$$d_c\left(x_{2n+1}, x_{2n+2}\right) \leq l\,K \max\left\{d_c\left(x_{2n}, x_{2n+1}\right), d_c\left(x_{2n+1}, x_{2n+2}\right)\right\}.$$

$l\,K < 1$ olduğundan

$$d_c\left(x_{2n+1}, x_{2n+2}\right) \leq l\,K d_c\left(x_{2n}, x_{2n+1}\right).$$

Benzer şekilde

$$d_c\left(x_{2n}, x_{2n+1}\right) \leq l\,K d_c\left(x_{2n-1}, x_{2n}\right).$$

$n \geq 1$ için

$$d_c\left(x_n, x_{n+1}\right) \leq K\,l\,d_c\left(x_{n-1}, x_n\right) \leq \ldots \leq \left(l\,K\right)^n d_c\left(x_0, x_1\right), \tag{4.22}$$

olur. Eş. 4.22 ve konik metrik uzaylarda $\|.\|$ ve üçgen eşitsizliğinden, $m > n$ için,

$$d_c\left(x_n,x_m\right)\le K\left[d_c\left(x_n,x_{n+1}\right)+d_c\left(x_{n+1},x_{n+2}\right)+...+d_c\left(x_{m-1},x_m\right)\right]$$

$$\le K\left[\left(l\,K\right)^n d_c\left(x_0,x_1\right)+\left(l\,K\right)^{n+1} d_c\left(x_0,x_1\right)+...+\left(l\,K\right)^{m-1} d_c\left(x_0,x_1\right)\right]$$

$$\le K\left[\left(l\,K\right)^n+\left(l\,K\right)^{n+1}+...+\left(l\,K\right)^{m-1}\right]d_c\left(x_0,x_1\right)$$

$$\le K\frac{\left(l\,K\right)^n}{1-\left(l\,K\right)}d_c\left(x_0,x_1\right). \qquad (4.23)$$

Eş. 4.23 de $m,n\to\infty$ için limit alırsak Lemma 3.2' den $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. X tam olduğundan $z\in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} x_n = z \qquad (4.24)$$

olur. Eş. 4.20 den

$$d_c\left(T_b\,z,x_{2n+1}\right)=d_c\left(T_b\,z,T_a\,x_{2n}\right)$$

$$\le l\ \max\left\{\begin{array}{l} d_c\left(z,x_{2n}\right),d_c\left(z,T_b\,z\right),d_c\left(x_{2n},x_{2n+1}\right), \\ \frac{1}{2}\left[d_c\left(z,x_{2n+1}\right)+d_c\left(x_{2n},T_b\,z\right)\right] \end{array}\right\}$$

$n\to\infty$ için limit alırsak Eş. 4.24 ve Lemma 3.3' den

$$d_c\left(T_b\,z,z\right)\le l\,d_c\left(z,T_b\,z\right)$$

olur. O zaman $d_c\left(T_b\,z,z\right)=0$ ve $T_b\,z=z$.

z nin $\{T_a\}_{a\in J}$ nin sabit noktası olduğunu göstermek için $a \in J$ keyfi olsun. Eş. 4.20 den $x = y = z = T_b z$ ile

$$d_c\left(z, T_b z\right) = d_c\left(T_b z, T_a z\right) \leq l\,(a)\max\left\{d_c\,(z, T_a z), \frac{1}{2} d_c\,(z, T_a z)\right\}$$

olur ve böylece $T_a z = z$ dir. Sonuç olarak tüm T_a ların ortak sabit noktası vardır. Kabul edelim ki w, T_b nın z den farklı diğer sabit noktası olsun. O zaman yukarıdaki gibi w, $\{T_a\}_{a\in J}$ nin ortak sabit noktası olur. Eş. 4.20 den

$$d_c\left(z, w\right) = d_c\left(T_b z, T_a w\right) \leq l\; d_c\left(z, w\right)$$

ve $z = w$ dır. O zaman z tüm $\{T_a\}$ ’lar için tek ortak sabit noktadır. Böylece ispat tamamlanır.

5. SONUÇ

İlk bölümde metrik uzaylar, sabit nokta teoremleri ve konik metrik uzaylar hakkında bilgi verilmiştir.

İkinci bölümünde ise gelecek bölümlerde verilecek olan teoremlerin ispatlarında kullanılacak bazı temel tanımlar ifade edilmiştir.

Üçüncü bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda konik metik uzaylarda bazı temel tanımlar verilmiştir. Ayrıca konik metrik uzaylarda bazı teoremler ispatlanmıştır. İkinci kısımda Baire kategori teoremini ispatlamak için bazı temel tanım ve lemmalara yer verildi. Üçüncü kısımda konik normlu uzaylar ve konik Banach uzayların tanımları verildi ve bu uzaylar üzerinde bazı yeni tanımlar ve teoremler elde edildi.

Dördüncü bölüm iki kısımdır. Birinci kısımda konik metrik uzaylarda çapsal büzülebilir dönüşümü tanımlayarak bazı sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır. İkinci kısımda iki alt kısım vardır. İlk olarak konik metrik uzaylarda genelleştirilmiş büzülme dönüşümleri için sabit nokta teoremi ispatlanmıştır. İkinci olarak konik metrik uzaylarda genelleştirilmiş büzülme dönüşümleri için bir ortak sabit nokta teoremi ispatlanmıştır.

KAYNAKLAR

1. Abbas, M., Jungck, G., “Common fixed point results for non commuting mappings without continuity in cone metric spaces”, ***J. Math. Anal. Appl***., 341(1): 416-420 (2008).

2. Abbas, M., Rhoades, B.E., “Fixed and periodic point results in cone metric spaces”, ***Applied Mathematics Letters***, 22(4): 511-515 (2009).

3. Achari, J., “Ćirić's generalized contractions in L-spaces”, ***Glas Mat. (Zagreb)***, ser. III 13(33): 307-310 (1978).

4. Achari, J., “Generalized multivalued contractions and fixed points”,***Rev. Roum. Math. Pures Appl.***, 24: 179-182 (1979).

5. Agarwal, R. P., Meehan, M., O’Regan, D., “Fixed Point Theory and Applications”,***Cambridge University Press***, Cambridge, 1-112 (2001).

6. Aliprantis, D., Tourky, R., “Cones and Duality”, ***American Mathematical Society***, Island, 84: 1-110 (2007).

7. Azam, A., Arshad, M., Beg, I., “Common fixed points of two maps in cone metric spaces”, ***Rend. Circ. Mat. Palermo***, 57: 433-441 (2008).

8. Banach, S., “Sur les oprations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrales”,***Fund. Math.***, 3: 133-181 (1922).

9. Berinde, V., “Iterative Approximation of Fixed Points”,***Springer-verlag***, Berlin Heidelberg, 31-59 (2007).

10. Border, Kim C., “Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory”, ***Cambridge University Press,*** Cambridge, 23-38 (1985).

11. Brouwer, L. E. J., “Uber Abbildung von Mannigfaltigkeiten”, ***Math. Ann.,*** 71: 97-115 (1910).

12. Copson, E. T., “Metric Spaces”, ***Cambridge University Press,*** Cambridge, 1-46 (1968).

13. Cristina B., Vetro, P., “ϕ-Pairs and common fixed points in cone metric spaces”, ***Rend. Circ. Mat. Palermo***, 57: 279-285 (2008).

14. Ćirić, Lj. B., “Generalized contractions and fixed point theorems”, ***Publ. Inst. Math.,*** 12(26): 19-26 (1971).

15. Ćirić, Lj. B., "On a family of contractive maps and fixed points",***Publ. Inst. Math.,*** 17(31): 45-51 (1974).

16. Ćirić, Lj. B., "On common fixed points in uniform spaces",***Publ. Inst. Math.,*** 24(38): 39-43 (1978).

17. Ćirić, Lj. B., "Fixed Point Theory: Contraction Mapping Principle",***Faculty of Mechanical Engineering, University of Belgrad***e, Beograd, 27: 66-72 (2003).

18. Deimling, K., "Nonlinear Functional Analysis",***Springer-Verlag,*** Berlin, 217-255(1985).

19. Frèchet, M., "Sur quelques points du calcul fonctionnel", ***Rendic. Circ. Mat. Palemo,*** (22): 1-74 (1906).

20. Frèchet, M., "Les espaces abstrait topologiquement affine",***Acta Math***., 47: 25-52 (1926).

21. Giles, J. R., "Introduction to the Analysis of Metric Spaces", ***Cambridge University Press,*** Cambridge, 1-103, 160-200 (1987).

22. Goebel, K., "Topics in Metric Fixed Point Theory",***Cambridge University Press,*** Cambridge, 1-37 (1990).

23. Gornicki, J., Rhoades, B. E., "A general fixed point theorem for involutions", ***Indian J. Pure. Appl. Math.,*** 27: 13-23 (1996).

24. Hadžić, O., Pap, E., "Fixed Point Theory in Probabilistic Metric Spaces",***Kluwer Academic Publishers,*** Dordrecht, 47-91 (2001).

25. Huang, L. G., Zhang, X., "Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings",***J. Math. Anal*. *Appl.,*** 332: 1468-1476 (2007).

26. Ilić, D., Rakoćević, V., "Common fixed points for maps on cone metric space", ***J. Math. Anal. Appl***., 341: 876-882 (2008).

27. Ilić, D., Rakoćević, V., "Quasi-contraction on cone metric space", ***Applied Mathematics Letters***, 22: 728-731 (2009).

28. Istrăţescu, V. I., "Fixed Point Theory: An Introduction", ***D. Reidel Publishing Company***, Dordrecht, 1-177 (1981).

29. Kannan, R., "Some results on fixed points",***Bull. Calcutta Math. Soc.,*** 60: 71-76 (1968).

30. Kirk, W. A., Sims, B., "Handbook of Metric Fixed Point Theory", ***Kluwer Academic Publishers,*** Dordrecht, 1-47 (2001).

31. Pachpatte, B. G., “Extension of Ćirić's maps and fixed point theorem”, ***Chung Yuan J.,*** India, 8: 13-16 (1979).

32. Pal, T. K. , Maiti, M., Achari, J., “Extension of Ćirić's generalized contractions”, ***Mat. Vesnik***, 13(28): 313-317 (1976).

33. Pal, T. K., Maiti, M., “Extensions of fixed point theorems of Rhoades and Ćirić”, ***Proc. Amer. Math. Soc.,*** 64: 283-286 (1977).

34. Pal, T. K., Maiti, M., “On orbital contractions and Ćirić's generalized contractions”, ***Glas Mat.,*** Ser**.** III 13(33): 81-89 (1978).

35. Raja, R., Vaezpour, S. M., “Some extensions of Banach`s contraction principle in complete cone metric spaces”, ***Fixed Point Theory and Applications***, 2008:10-21: (2008).

36. Ray, B. K., “On Ćirić's fixed point theorem”, ***Fund. Math.***, 94(3): 221-229 (1977).

37. Ray, B. K., “On some theorems of Ćirić”, ***Mat. Vesnik***, 2(15, 30): 215-218 (1978).

38. Rezapour, Sh., “Best approximations in cone metric spaces”, ***Mathematica Moravica***, (11): 85-88 (2007).

39. Rezapour, Sh., Hamlbarani, R., “Some notes on the paper "Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings"”, ***J. Math. Anal. Appl.***, 345: 719-724 (2008).

40. Rhades, B. E., “A fixed point theorem for some nonself mappings”, ***Math. Japonica***, 23: 457-459 (1978).

41. Rolewicz, S., “Metric Linear Spaces”, ***D. Reidel Publishing Company***, Dordrecht, 1-77 (1985).

42. Schauder, J., “Der fixpunktsatz in funktionalramen”, ***Studia Math.***, 2: 171-180 (1930).

43. Searcóid, M. Ò., “Metric Spaces”, ***Springer-verlag***, London, 1-18, 103-121 (2007).

44. Shirali, S., Vasudeva, H. L., “Metric Spaces”, ***Springer-verlag***, London, 23-98 (2006).

45. Singh, K. L., “A remark on a paper: "Extensions of fixed point theorems of Rhoades and Ćirić”, ***Bull. Math. Soc. Math. R. S. Roumanie***, Bucharest, 24 (72): 407-409 (1980).

46. Smart, D. R., “Fixed Point Theorems”, ***Cambridge University Press***, Cambridge, 1-32 (1974).

47. Vetro, P., “Common fixed points in cone metric spaces”, ***Rend. Circ. Mat. Palermo***, 56: 464-468 (2007).

48. Wardowski, D., “Endpoint and fixed points of set-valued contractions in cone metric spaces”, ***Nonlinear Analysis***, 71: 512-516 (2009).

49. Xu, H. K., “Diametrically contractive mappings”, ***Bulletin of the Australian Mathematical Society***, 70(3): 463-468 (2004).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: ABULOHA, Muhib
Uyruğu	: FİLİSTİN
Doğum tarihi ve yeri	: 10.03.1972 Jabaa, Filistin
Medeni hali	: Evli
Telefon	: 00970599081901, 0097022524290
e-mail	: muhib2000@yahoo.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Birzeit Üniversitesi Eğitim Fakültesi	2001
Lisans	Birzeit Üniversitesi Matematik Bölümü	1996
Lise	Bet Omer Lisesi	1990

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
1996 – 2004	Filistin Teknik Koleji	Araştırma Görevlisi

Diller

Arapça, Türkçe ve İngilizce.

Hobiler

Satranç oynama ve Kitap okuma.