

١١

الجزء  
الأول

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دولة فلسطين  
وزارة التربية والتعليم العالي

# الرياضيات

الفرع العلمي والصناعي

المؤلفون:

أ. رائد ملاك

أ. حسين عرفات

أ. وهيب جبر (منسقاً)

أ. عريب الزبون

أ. عبد الحافظ الخطيب



أ. نسرین دویکات

أ. قیس شبانة

قررت وزارة التربية والتعليم العالي في دولة فلسطين  
تدريس هذا الكتاب في مدارسها بدءاً من العام الدراسي ٢٠١٧ / ٢٠١٨ م

### الإشراف العام

رئيس لجنة المناهج  
د. صبري صيدم  
نائب رئيس لجنة المناهج  
د. بصري صالح  
رئيس مركز المناهج  
أ. ثروت زيد

### الدائرة الفنية

الإشراف الإداري  
أ. حازم عجاج  
التصميم  
أ. كمال فحماوي  
التحكيم العلمي  
د. محمد نجيب  
التحرير اللغوي  
أ. عمر عبد الرحمن  
متابعة المحافظات الجنوبية  
د. سمية النخالة

### الطبعة التجريبية

٢٠١٨ م / ١٤٣٩ هـ

جميع حقوق الطبع محفوظة ©

دولة فلسطين  
وزارة التربية والتعليم العالي



مركز المناهج

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps

facebook.com/MinistryOfEducationWzartAltrbyWaltlym

هاتف: +973-2-2983280 | فاكس: +973-2-2983200

حي الماصيون، شارع المعاهد

ص. ب 719 - رام الله - فلسطين

pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

يتصف الإصلاح التربوي بأنه المدخل العقلاني العلمي النابع من ضرورات الحالة، المستند إلى واقعية النشأة، الأمر الذي انعكس على الرؤية الوطنية المطورة للنظام التعليمي الفلسطيني في محاكاة الخصوصية الفلسطينية والاحتياجات الاجتماعية، والعمل على إرساء قيم تعزز مفهوم المواطنة والمشاركة في بناء دولة القانون، من خلال عقد اجتماعي قائم على الحقوق والواجبات، يتفاعل المواطن معها، ويعي تراكيبها وأدواتها، ويسهم في صياغة برنامج إصلاح يحقق الآمال، ويلامس الأماني، ويرنو لتحقيق الغايات والأهداف.

ولما كانت المناهج أداة التربية في تطوير المشهد التربوي، بوصفها علماً له قواعده ومفاهيمه، فقد جاءت ضمن خطة متكاملة عاجلت أركان العملية التعليمية التعلمية بجميع جوانبها، بما يسهم في تجاوز تحديات النوعية بكل اقتدار، والإعداد لجيل قادر على مواجهة متطلبات عصر المعرفة، دون التورط بإشكالية التشتت بين العولمة والبحث عن الأصالة والانتقاء، والانتقال إلى المشاركة الفاعلة في عالم يكون العيش فيه أكثر إنسانية وعدالة، وينعم بالرفاهية في وطن نحمله ونعظمه.

ومن منطلق الحرص على تجاوز نمطية تلقي المعرفة، وصولاً لما يجب أن يكون من إنتاجها، وباستحضار واعٍ لعدد من المنطلقات التي تحكم رؤيتنا للطالب الذي نريد، وللبنية المعرفية والفكرية المتوخاة، جاء تطوير المناهج الفلسطينية وفق رؤية محكمة بإطار قوامه الوصول إلى مجتمع فلسطيني ممتلك للقيم، والعلم، والثقافة، والتكنولوجيا، وتلبية المتطلبات الكفيلة بجعل تحقيق هذه الرؤية حقيقة واقعة، وهو ما كان له ليكون لولا التناغم بين الأهداف والغايات والمنطلقات والمرجعيات، فقد تألفت وتكاملت؛ ليكون النتاج تعبيراً عن توليفة تحقق المطلوب معرفياً وتربوياً وفكرياً.

ثمّة مرجعيات تؤطر لهذا التطوير، بما يعزز أخذ جزئية الكتب المقررة من المنهاج دورها المأمول في التأسيس؛ لتوازن إبداعي خلاق بين المطلوب معرفياً، وفكرياً، ووطنياً، وفي هذا الإطار جاءت المرجعيات التي تم الاستناد إليها، وفي طليعتها وثيقة الاستقلال والقانون الأساسي الفلسطيني، بالإضافة إلى وثيقة المنهاج الوطني الأول؛ لتوجه الجهد، وتعكس ذاتها على مجمل المخرجات.

ومع إنجاز هذه المرحلة من الجهد، يغدو إزجاء الشكر للطواقم العاملة جميعها؛ من فرق التأليف والمراجعة، والتدقيق، والإشراف، والتصميم، وللجنة العليا أقل ما يمكن تقديمه، فقد تجاوزنا مرحلة الحديث عن التطوير، ونحن واثقون من تواصل هذه الحالة من العمل.

وزارة التربية والتعليم العالي

مركز المناهج الفلسطينية

آب / ٢٠١٧

تُعد المرحلة الثانوية (١١-١٢) آخر مراحل التعليم المدرسي حيث تشهد أهم التغيرات التي يمرّ فيها الطالب وترسّم معالم شخصيته مستقبلاً، وفيها يكتسب المعارف والخبرات الأساسية، وفي الوقت نفسه يتمتع بحياة اجتماعية سليمة ليكون عضواً فاعلاً يواكب المستجدات في المجالات العلمية والتكنولوجية بما يخدم المجتمع.

وتلعب العملية التعليمية التعلمية في هذه المرحلة دوراً كبيراً في تمكين الطلبة من المعارف والمهارات والخبرات باكتشاف المعرفة وتوظيفها في حلّ المشكلات الحياتية واتخاذ قرارات ذات علاقة بواقع حياتهم اليومية مما يساهم في تحسين نوعية التعليم والتعلم وصولاً إلى طلبة باحثين مبدعين ومنتجين.

وتُعدّ الرياضيات من المباحث التي تخاطب عقل الطالب وتنمّي فيه مهارات متنوعة تكسبه القدرة على التعامل المنطقي مع محيطه ومن حوله؛ وبذلك تؤدي إلى تمكين الطالب من اكتساب معارف ومهارات واتجاهات وقيم تساعده في تنمية ذاته ومجتمعه، من خلال معرفته بمحيطه المادي والبشري وبالأنظمة المعرفية المختلفة، وحلّ ما يواجهه من مشكلات دراسية وعلمية في حاضره ومستقبله.

وقد تضمّن هذا الكتاب أنشطة منظمة للمفاهيم والمعارف التي تُحاكي السياقات الحياتية الواقعية وتمكّنها ضمن أنشطة معروضة بسياقات حياتية واقعية، تُحاكي البيئة الفلسطينية وخصوصيتها وتركّز على التعلّم النشط مُراعياً لقدرات الطلبة وحاجاتهم، إذ تتاح أمامهم الفرص لتبادل الخبرات من خلال المناقشة والحوار والعمل الجماعي وبالإفادة من وسائل تكنولوجية لتوظيفها في البحث عن المعلومات وتوظيفها بما يحقق التعلّم الفعّال.

يتكوّن هذا الكتاب من ثلاث وحدات دراسية، تناولت الوحدة الأولى المتجهات والهندسة الفراغية ضمن أنشطة متعددة، والوحدة الثانية المنطق الرياضي وطرق البرهان وربطها مع سياقات حياتية ورياضية، والوحدة الثالثة المعادلات والمتباينات، فهي تعميق وتطوير لمعارف الطلبة السابقة.

وأخيراً نتمنى أن نكون قد وفّقنا في إنجاز هذا الكتاب لما فيه خير لأولادنا ولفلسطين العزيزة.

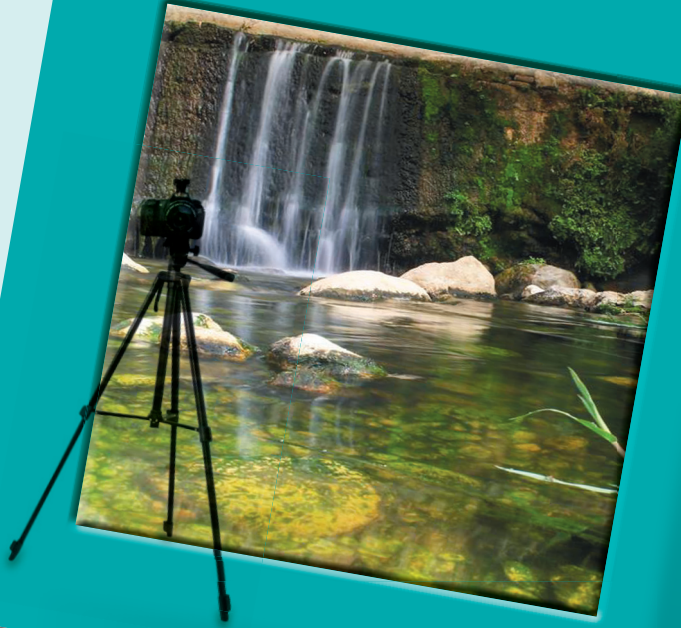
| المتجهات والهندسة الفراغية |   | الوحدة |
|----------------------------|---|--------|
| ٤                          | ١ - ١ الإحداثيات الديكارتية في الفراغ ثلاثي الأبعاد | ١      |
| ١٠                         | ٢ - ١ المتجهات في المستوى                           |        |
| ١٥                         | ٣ - ١ العمليات على المتجهات                         |        |
| ٢٢                         | ٤ - ١ المتجهات في الفراغ                            |        |
| ٢٥                         | ٥ - ١ الضرب القياسي (الداخلي) للمتجهات              |        |
| ٣٢                         | ٦ - ١ الهندسة الفراغية (للفرع العلمي فقط)           |        |
| ٣٩                         | ٧ - ١ نظرية الأعمدة الثلاثة (للفرع العلمي فقط)      |        |

| المنطق الرياضي |  | الوحدة |
|----------------|--|--------|
| ٤٨             | ١ - ٢ العبارة الرياضية، ونفيها                     | ٢      |
| ٥٢             | ٢ - ٢ جداول الصواب، وأدوات الربط                   |        |
| ٥٧             | ٣ - ٢ أدوات الربط الشرطية                          |        |
| ٦١             | ٤ - ٢ العبارات الرياضية المتكافئة                  |        |
| ٦٦             | ٥ - ٢ الجملة المفتوحة                              |        |
| ٧٠             | ٦ - ٢ العبارات الرياضية المسورة (للفرع العلمي فقط) |        |
| ٧٤             | ٧ - ٢ نفي العبارة المسورة (للفرع العلمي فقط)       |        |
| ٧٦             | ٨ - ٢ البرهان الرياضي (للفرع العلمي فقط)           |        |

| المعادلات والمتباينات |  | الوحدة |
|-----------------------|--|--------|
| ٩٠                    | ١ - ٣ حل نظام مكون من ثلاث معادلات خطية                                    | ٣      |
| ٩٣                    | ٢ - ٣ حلّ نظام من معادلتين في متغيرين: إحداهما خطية، والأخرى تربيعية       |        |
| ٩٦                    | ٣ - ٣ حلّ نظام مكون من معادلتين تربيعيتين في متغيرين                       |        |
| ٩٩                    | ٤ - ٣ حل معادلات أسية ولوغاريتمية  |        |
| ١٠٣                   | ٥ - ٣ حل أنظمة المتباينات الخطية بمتغيرين (للفرع العلمي فقط)               |        |
| ١٠٧                   | ٦ - ٣ حلّ معادلات تتضمن القيمة المطلقة (للفرع العلمي فقط)                  |        |
| ١٠٩                   | ٧ - ٣ حلّ متباينات خطية في متغيرين تتضمن القيمة المطلقة (للفرع العلمي فقط) |        |

# المتجهات والهندسة الفراغية

الوحدة



لمآذا يتم صناعة حامل الكاميرا بثلاثة أرجل وليس بأربعة أرجل؟

عند دراسة هذه الوحدة سيكتسب الطلبة أساليب التفكير التأملي من خلال إدارتهم لخواص الأشكال والمجسمات، والعلاقات الداخلية بينها، ومن خلال مفاهيم الوحدة سيتمكن الطلبة من ربط المتجهات ومفاهيم الهندسة الفراغية في سياقات حياتية، والتعامل معها ضمن أسس علمية.

ويَتَوَقَّعُ من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة الوحدة أن يحققوا الأهداف الآتية:

- ١ تحديد النقاط في الفراغ وإيجاد المسافة بين نقطتين وإحداثيات المنتصف بين نقطتين.
- ٢ إجراء العمليات على المتجهات في المستوى والفراغ وطرق تمثيلها.
- ٣ تحديد الزوايا الاتجاهية لمتجهات في الفراغ.
- ٤ تطبيقات فيزيائية وحياتية على المتجهات.
- ٥ توظيف المتجهات في تطبيقات فيزيائية وهندسية وحياتية.
- ٦ إعطاء أمثلة واقعية على المسلمات والنظريات في الهندسة الفراغية وتطبيقاتها.
- ٧ تعريف الأوضاع المختلفة لكل من: مستقيمين مختلفين، ومستقيم ومستوى، ومستويات مختلفة في الفراغ.
- ٨ تنمية القدرة على التعبير والدقة في استخدام المصطلحات الهندسية.



نشاط ١:

الألعاب الرياضية متعددة ، ففي بعضها تكون حركة أداة اللعب في المستوى وبعضها تكون الحركة في الفراغ .

ففي لعبة الهوكي تتحرك قطعة اللعب في بعدين في المستوى وتمثل إحداثيات موقعها بالزوج المرتب (س، ص).

هل تتحرك الكرة في لعبة كرة القدم كما تتحرك قطعة اللّعب في لعبة الهوكي؟  
كيف يمكن تحديد موقع الكرة في لعبة كرة القدم؟

أتذكر أنّ: المسافة بين النقطتين أ (س<sub>١</sub> ، ص<sub>١</sub>) ، ب (س<sub>٢</sub> ، ص<sub>٢</sub>)

$$أب = \sqrt{(س_١ - س_٢)^2 + (ص_١ - ص_٢)^2}$$

$$وإحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة أب = \left( \frac{س_١ + س_٢}{٢} , \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$$

نشاط ٢:

بالاعتماد على الخريطة الآتية إذا مثلنا موقع مدينة رام الله بالنقطة أ(٥ ، ٢ ، ٤) وموقع مدينة غزة بالنقطة ب (-٢ ، ٥ ، ١) . أجد المسافة بين المدينتين. (ملاحظة : كل وحدة تعادل ١٠ كم والإحداثيات تقريبية).

$$أب = \underline{\hspace{2cm}}$$

لاحظ أنّ إحداثيات موقع مدينة نابلس (٣ ، ٦ ، ٦)

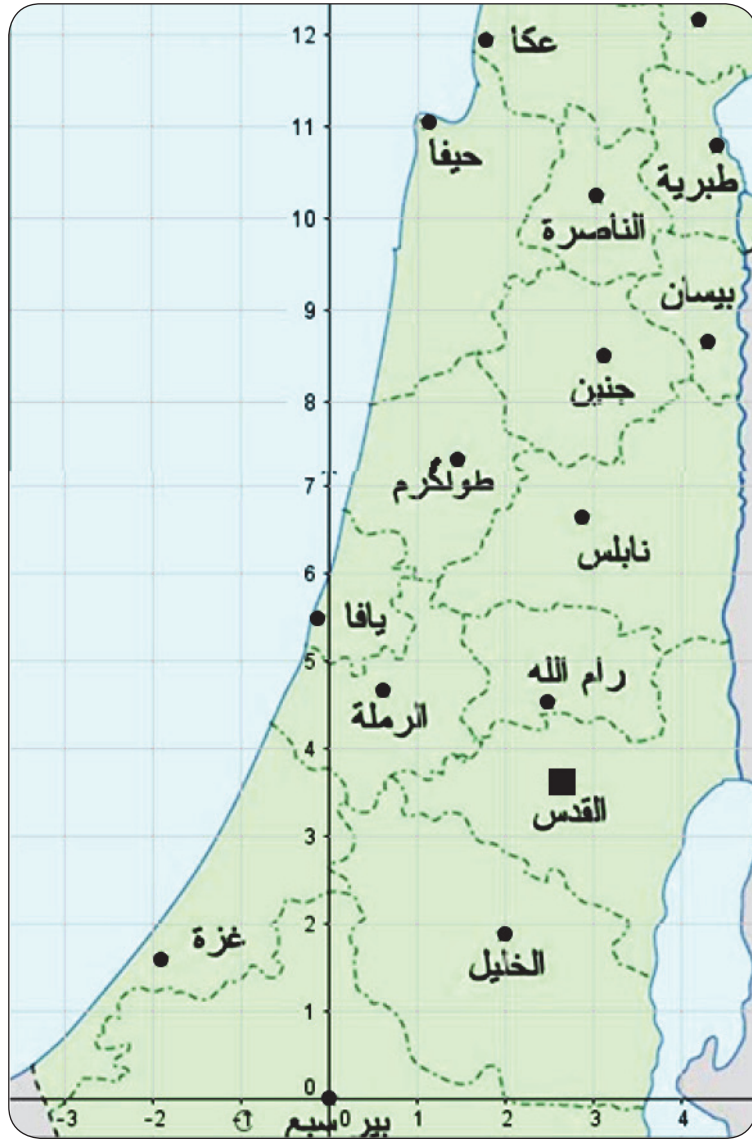
وإحداثيات موقع مدينة الناصرة (٣ ، ٢ ، ١٠)



بالاعتماد على قانون إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة، أجد إحداثيات موقع مدينة جنين والتي تقع تقريبا في منتصف المسافة بين نابلس و                     والناصرة.

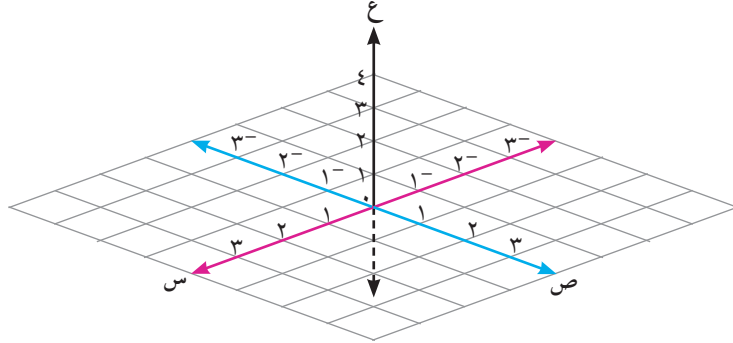
إحداثيات موقع مدينة جنين = (                      ،                      )

أقارن الإجابة بالرجوع إلى الخريطة. (                      ،                      )





إذا أردنا تحديد موقع نجم في السماء أو قمر صناعي أو طائرة أو قمة جبل، فإنّ نظام الإحداثيات ذا البعدين لا يفي بالغرض؛ لأن هذه المواقع تمثل بنقاط في الفراغ. ولتحديد ذلك يلزمنا نظام إحداثيات ذو ثلاثة أبعاد، وهو موضح بالشكل الآتي:

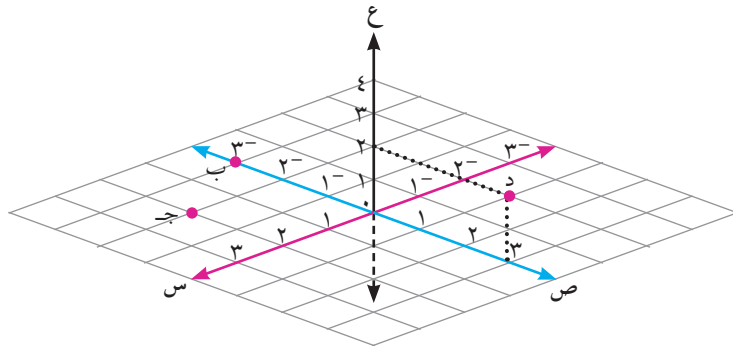


وهذا النظام يتكون من ثلاثة مستقيمت متعامدة متنى متنى، ومتقاطعة في نقطة واحدة تُسمى نقطة الأصل  $(0, 0, 0)$  وتُسمى هذه المستقيمت المحاور الإحداثية، وهي بالترتيب: محور س، محور ص، محور ع، وهي تقسم الفراغ إلى ثمانية أثمان تم تحديد الثمن الأول بحيث تكون س، ص، ع موجبة وأية نقطة في الفراغ تمثل بثلاثي مرتب أ (س، ص، ع) كما أنه يقسم الفراغ إلى ثلاثة مستويات رئيسة، وهي المستوى س ص، المستوى س ع، المستوى ص ع.

مثال ١: أحدّد موقع النقاط الآتية في الفراغ

أ  $(0, 0, 2)$ ، ب  $(0, 3, 0)$ ، ج  $(0, 2, 2)$ ، د  $(2, 3, 0)$

الحل: النقطة أ تقع على الجزء الموجب من محور السينات. والنقطة ب تقع على الجزء السالب من محور الصادات والنقطة ج تقع في المستوى س ص والنقطة د تقع في المستوى ص ع.

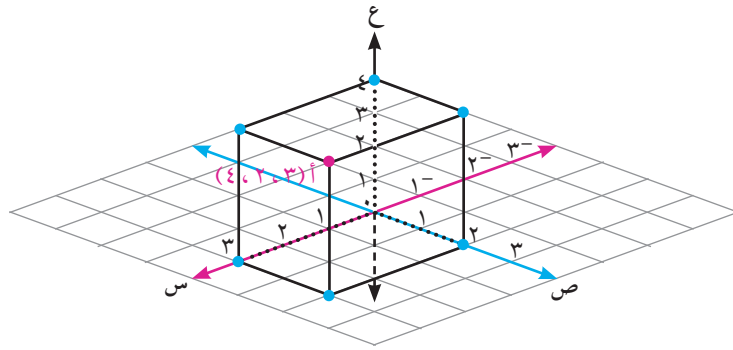


مثال ٢:

لتحديد النقطة أ (٤، ٢، ٣) في الفراغ نقوم بتحديد النقاط الآتية:

- ١ و نقطة الأصل (٠، ٠، ٠)
- ٢ ب تقع على محور السينات (٠، ٠، ٣)
- ٣ ج تقع على محور الصادات (٠، ٢، ٠)
- ٤ د تقع على محور العينات (٤، ٠، ٠)
- ٥ هـ تقع في المستوى س ص (٠، ٢، ٣)
- ٦ ز تقع في المستوى س ع (٤، ٠، ٣)
- ٧ ح تقع في المستوى ص ع (٤، ٢، ٠)
- ٨ أ (٤، ٢، ٣) تقع في الثمن الأول

ألاحظ أنّ بعد النقطة أ (٤، ٢، ٣) عن المستوى س ص يساوي ٤ وحدات وهو إحداثي ع



استخدم برامج حاسوبية مثل جيوجبرا لتمثيل النقاط السابقة في الفراغ .

نشاط بيتي:

المسافة بين نقطتين في الفراغ:

إذا كانت أ (أ<sub>١</sub>، أ<sub>٢</sub>، أ<sub>٣</sub>) و ب (ب<sub>١</sub>، ب<sub>٢</sub>، ب<sub>٣</sub>) نقطتين في الفراغ فإنّ

$$أب = \sqrt{(أ_١ - ب_١)^2 + (أ_٢ - ب_٢)^2 + (أ_٣ - ب_٣)^2}$$

وإذا كانت م نقطة تقع في منتصف المسافة في القطعة المستقيمة أ ب

$$م \left( \frac{أ_١ + ب_١}{٢}, \frac{أ_٢ + ب_٢}{٢}, \frac{أ_٣ + ب_٣}{٢} \right)$$

**نشاط ٣:** إذا كانت أ، ب، ج ثلاث نقاط في الفراغ، وكانت ج تقع في منتصف المسافة في القطعة المستقيمة  $\overline{أب}$ ، بحيث أن أ (١٢، ٤-)، ج (٤، ١)، ب (٥، ١) أجد:

١ إحداثيات ب      ٢ طول  $\overline{أب}$

**الحل :** ١ نفرض إحداثيات ب (س، ص، ع)

فيكون  $٤^- = \frac{١٢ + س}{٢}$  ومنها س = \_\_\_\_\_

وبنفس الطريقة ص = \_\_\_\_\_ و ع = \_\_\_\_\_

٢  $\overline{أب} = \sqrt{\text{_____} + \text{_____} + \text{_____}}$

**مثال ٣:** إذا كانت أ (٢س، ٢س، ٥)، ب (١-، ٢-، ٥) وكان  $\overline{أب} = ٥\sqrt{٢}$  أجد قيم س.

**الحل :** (أب)  $٥٠ = ٢٥ + ٢(٢ + س٢) + ٢(١ + س٢) = ٥٠$  (لماذا؟)

ومنها ينتج  $٥٠ = ٢٥ + ٤ + س٨ + ٢س٤ + ١ + س٤ + ٢س٤$

$٠ = ٢٠ - س١٢ + ٢س٨$

ومنها ينتج:  $٠ = ٥ - س٣ + ٢س٢$

ومنها  $٠ = (١ - س)(٥ + س٢)$

إذن  $س = \frac{٥^-}{٢}$ ، ١



## تمارين ومسائل ١-١

١ أعين النقاط الآتية في الفراغ، ثم أجد بعد النقطة ج عن المستويات س ص ، س ع ، ص ع

١ أ (٠، ٣، ٢)

٢ ب (٢-، ٠، ٠)

٣ ج (-٤، ٢، ٣).



٢ في رحلة مدرسية ذهب طلاب مدرسة ابن رشد إلى أريحا، وركبوا ثلاث عربات تلفريك أ، ب، ج. وفي لحظة ما كانت إحداثيات موقع العربتين أ، ج كما يلي أ (١٠، ٢٢، ٤٠)، ج (-٤٥، ٢٩، ١٣) وكانت العربة ج تقع في منتصف المسافة بين العربتين أ، ب أجد:

١ إحداثيات موقع العربة ب.

٢ المسافة بين العربتين أ و ب (الوحدات بالأمتار).

٣ نقطة في الفراغ بعدها عن المستوى س ص = ٢ وحدة وبعدها عن المستوى س ع = ٧ وحدات وبعدها عن المستوى ص ع = ٣ وحدات ما إحداثيات هذه النقطة. (أكتب جميع الحالات الممكنة).

٤ أ ب ج مثلث فيه أ (١، ٣، ٢)، ج (-١، ٣، ٢)

فإذا كانت النقطة د (س، ٢-، س - ٢) هي إحداثيات منتصف  $\overline{أب}$

وكان (ج د) =  $\sqrt{٤٢}$  وحدة أجد إحداثيات النقطة ب حيث  $س < ٠$

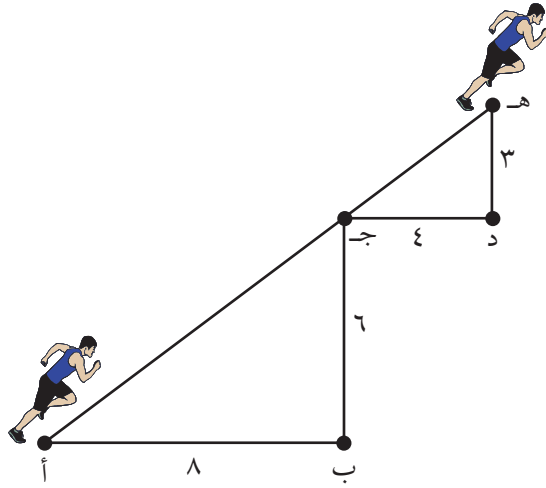
٥ أنقطة تقع على محور س ، و ب نقطة تقع على محور ص ، و ج نقطة تقع على محور ع ،

وكانت د ، هـ ، و تمثل إحداثيات المنتصف للقطع المستقيمة الثلاث  $\overline{أب}$  ،  $\overline{ب ج}$  ،  $\overline{ج د}$

على الترتيب بحيث إن د (٢، -٤، ٠)، هـ (-٤، ٤، ٠)، ما إحداثيات النقطة و؟

مهندس شاب يهوى الرياضة، فهو يدرك أن للرياضة فوائد صحيةً ونفسيةً كثيرة وممارستها تجعل الإنسان في نشاط دائم، وفي أحد السباقات للجري ركض مهندس مسافة ٨ كم باتجاه الشرق، ثم مسافة ٦ كم باتجاه الشمال، ثم مسافة ٤ كم باتجاه الشرق، ثم مسافة ٣ كم باتجاه الشمال، وقد استغرق مدة من الزمن قدرها ٣ ساعات. (انظر الشكل)

نشاط ١:



المسافة التي قطعها مهندس من أ إلى ب = ٨ كم باتجاه الشرق  
أكمل الفراغات الآتية:

- المسافة التي قطعها من ب إلى ج = \_\_\_\_\_ كم باتجاه \_\_\_\_\_  
المسافة التي قطعها من ج إلى د = \_\_\_\_\_ كم باتجاه \_\_\_\_\_  
المسافة التي قطعها من د إلى هـ = \_\_\_\_\_ كم باتجاه \_\_\_\_\_  
المسافة الكلية المقطوعة = \_\_\_\_\_ والإزاحة هي \_\_\_\_\_

هل أ، ج، هـ تقع على استقامة واحدة؟ فسّر إجابتك.

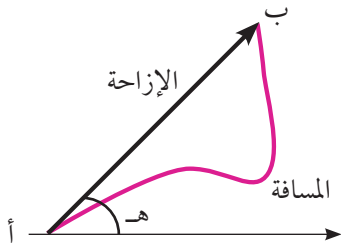
قياس الزاوية المحصورة بين القطعة المستقيمة أهـ والقطعة المستقيمة أب = .....

ألاحظ أن الزمن الذي استغرقه في السباق يساوي ٣ ساعات، فهل للزمن اتجاه؟

أذكر أن: المسافة المقطوعة هي مجموع المسافات التي يسيرها الجسم من نقطة البداية إلى نقطة النهاية أما الإزاحة فهي تحدد بعنصرين:

١ اتجاه الحركة.

٢ طول القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطة البداية ونقطة النهاية.



في الشكل الآتي المسافة المقطوعة هي طول المسار باللون الأحمر، أما الإزاحة فهي تحدد بطول القطعة أب والتي تصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها هـ واتجاه الحركة هو من أ إلى ب.

تعريف: تقسم الكميات إلى نوعين كميات متجهة تتحدد بالمقدار والاتجاه، وكميات قياسية (غير متجهة) تحدد بالمقدار فقط.

أصنف الكميات الآتية إلى كميات قياسية أو كميات متجهة:

نشاط ٢:

الوزن، الكتلة، الزمن، السرعة، درجة الحرارة، القوة، الشغل، الكثافة.

| كمية قياسية | كمية متجهة |
|-------------|------------|
| الزمن       | الوزن      |
|             |            |
|             |            |

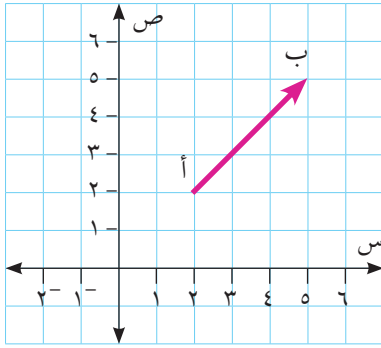
المتجه يحدد بالمقدار والاتجاه ويمكن تمثيله هندسيا في المستوى بقطعة مستقيمة موجهة اتجاهها من نقطة البداية إلى نقطة النهاية وطولها يمثل مقدار المتجه، ويرمز للمتجه بالرمز  $\overrightarrow{AB}$ ، بحيث تكون نقطة البداية هي  $A(x_1, y_1)$  ونقطة النهاية هي  $B(x_2, y_2)$  أو بالرمز  $\vec{m}$ ، ويرمز لطول المتجه بالرمز  $|\overrightarrow{AB}|$ .

ولتسهيل تمثيل المتجهات وإجراء العمليات عليها فإننا نمثل المتجه في ما يسمى الوضع القياسي،

بحيث نجعل نقطة البداية  $(0, 0)$  ونقطة النهاية جـ  $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

### نشاط ٣:



في الشكل المجاور إحداثيات نقطة البداية هي \_\_\_\_\_

إحداثيات نقطة النهاية هي \_\_\_\_\_

طول المتجه  $\vec{AB}$  = \_\_\_\_\_

قياس الزاوية التي يصنعها المتجه  $\vec{AB}$  مع الاتجاه

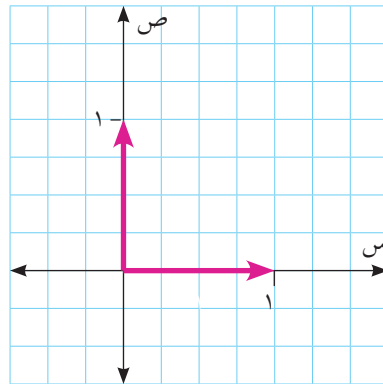
الموجب لمحور السينات = \_\_\_\_\_

أمثل المتجه  $\vec{AB}$  في الوضع القياسي

تعريف: يتساوى المتجهان  $\vec{m}$  ،  $\vec{n}$  إذا كان لهما نفس المقدار ونفس الاتجاه أي أنهما يمثلان بنفس الزوج المرتب في الوضع القياسي.

### متجهات خاصة:

- ١ المتجه الصفري: وهو المتجه الذي طوله صفر واتجاهه غير معين ويرمز له بالرمز  $\vec{0}$ .
- ٢ متجه الوحدة: وهو المتجه الذي طوله وحدة واحدة، ويرمز له بالرمز  $\vec{u}$ .
- ٣ متجه الوحدة الأساسي: وهو متجه الوحدة السيني، ويمثل بالزوج المرتب  $(1, 0)$ .  
وهو متجه الوحدة الصادي، ويمثل بالزوج المرتب  $(0, 1)$ .





مثال :

إذا كانت أ (2، 5-) ، ب (3، 1) ، ج (4، 1)

- ١ أمثل  $\vec{AB}$  في الوضع القياسي.
- ٢ أكتب  $\vec{AB}$  بدلالة متجهي الوحدة.
- ٣ أجد قياس الزاوية التي يصنعها المتجه  $\vec{AB}$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.
- ٤ أجد إحداثيات النقطة د بحيث إن  $\vec{AB} = \vec{D}$ .

الحل :

١ الزوج المرتب الذي يمثل  $\vec{AB}$  = ب - أ = (3، 1) - (2، 5-) = (1، 6)

٢  $\vec{AB} = 6\vec{u} + \vec{v}$

٣ ظاهر =  $\frac{ص}{س} = \frac{1}{6}$

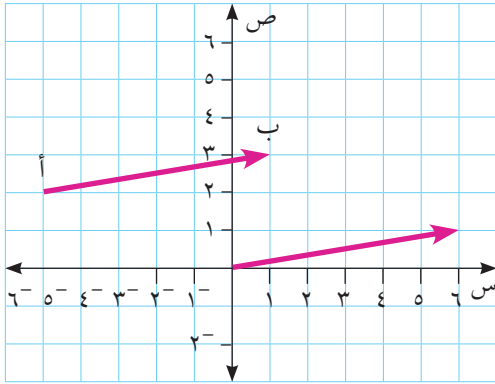
ومنها ه تساوي تقريبا 10°

٤ بما أن  $\vec{AB} = \vec{D}$

إذن: ب - أ = ج - د

د - (4، 1) = (1، 6)

ومنها د (3، 5-)



نشاط ٤ :

قام عامل بإزاحة صندوق خشبي من النقطة أ (3، 4) إلى النقطة ب (5، 10)

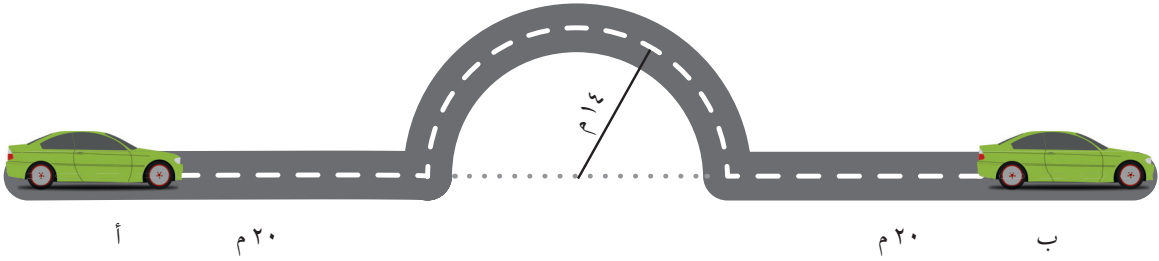
١- أكتب المتجه  $\vec{AB}$  بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين

$\vec{AB} = \text{ب} - \text{أ} = (\text{_____}, \text{_____}) = \text{_____}\vec{u} + \text{_____}\vec{v}$

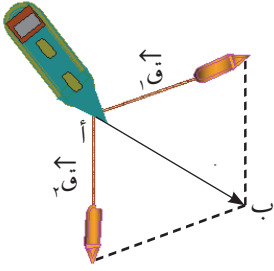
٢-  $|\vec{AB}| = \text{_____}$

## تمارين ومسائل ١-٢:

- ١ إذا كانت أ (٣، ٢-) ، ب (٢، ٥) ، جـ (٤، ٣) ثلاث نقاط في المستوى
  - أ أمثل المتجهين  $\vec{AB}$  ،  $\vec{AC}$  بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين
  - ب أجد طول كل من:  $\vec{AB}$  ،  $\vec{AC}$  .
- ٢ إذا كان  $\vec{m} = \vec{m}_1$  وكان  $\vec{m} = (2س + ٣، ص - ٢) = \vec{m}_٢$  ،  $\vec{m} = (ص، س + ٣)$  أجد قيم س و ص.
- ٣ تحركت سيارة من النقطة أ إلى النقطة ب حسب المسار الموضح في الشكل الآتي: أجد:
  - أ المسافة الكلية المقطوعة.
  - ب مقدار واتجاه إزاحة السيارة .



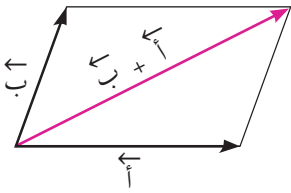
- ٤ أ ب جـ د متوازي أضلاع م نقطة خارجه أثبت أن:  $\vec{AM} + \vec{BM} + \vec{CM} + \vec{DM} = ٢ \vec{AD}$



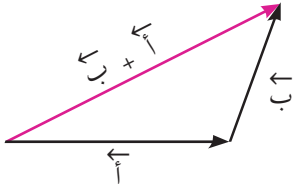
أفكّر وأناقش: يقوم قاربان بجر سفينة كما في الشكل، فتحرّكت السفينة من النقطة أ إلى النقطة ب، لماذا تحرّكت السفينة بهذا الاتجاه وما علاقة الإزاحة التي تحرّكتها بالقوتين المؤثرتين عليها؟

### أولاً - جمع المتجهات هندسياً:

إذا كان  $\vec{a}$  ،  $\vec{b}$  متجهين، فإنّ حاصل جمعها هو المتجه  $\vec{a} + \vec{b}$  ويمكن إيجاداه بطريقتين.

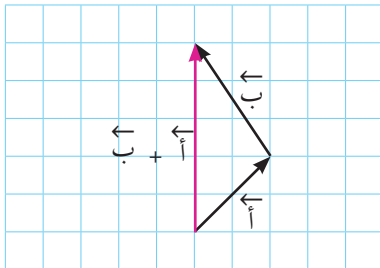
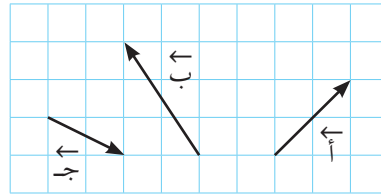


أ طريقة متوازي الأضلاع: حيث نسحب أحد المتجهين، بحيث يكون لهما نفس البداية، ثم نرسم متوازي أضلاع، فيكون حاصل جمع المتجهين كما هو موضح في الشكل المجاور.



ب طريقة المثلث: نقوم بإزاحة أحد المتجهين، بحيث تكون نقطة نهاية الثاني هي نقطة بداية الأول، ثم نوصل نقطة بداية الثاني مع نقطة نهاية الأول كما هو موضح في المجاور.

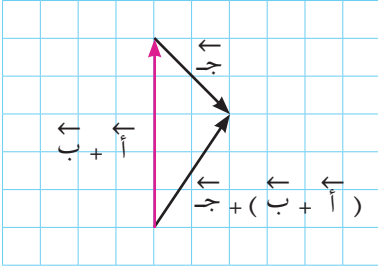
مثال ١: إذا كان  $\vec{a}$  ،  $\vec{b}$  ،  $\vec{c}$  ثلاثة متجهات ممثلة بالشكل الآتي:



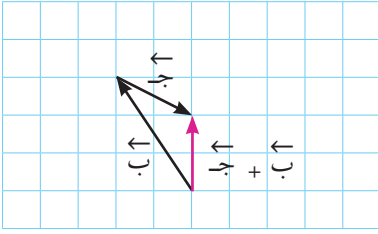
الحل: أمثل ما يلي هندسياً:

١  $\vec{a} + \vec{b}$

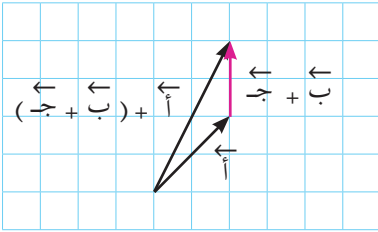
$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad ٢$$



$$\vec{a} + \vec{b} \quad ٣$$



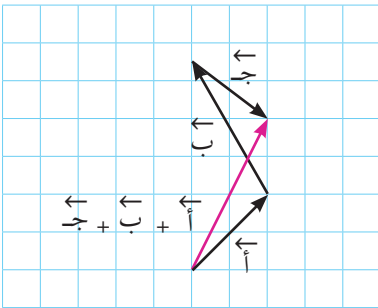
$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \quad ٤$$



ألاحظ أنّ  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

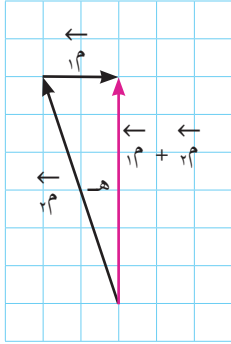
(الخاصية التجميعية)

باستخدام الخاصية السابقة يمكن جمع المتجهات الثلاثة بوضع المتجهات بشكل متتابعي وتوصيل نقطة البداية لأول متجه بنقطة النهاية لآخر متجه .



## نشاط ١:

يريد ربان طائرة أن يقود الطائرة باتجاه الشمال بسرعة ٥٠٠ كم/س، وفي نفس الوقت تهب رياح غربية بسرعة ٨٠ كم/س، ففي أي اتجاه يجب أن يوجه الطائرة حتى تبقى تطير باتجاه الشمال؟



## الحل :

نفرض اتجاه الرياح  $\vec{م}$ ، والاتجاه الذي ستوجه به الطائرة  $\vec{م}$  وحتى تبقى الطائرة باتجاه الشمال دائماً يجب أن تكون  $\vec{م} + \vec{م}$  باتجاه ظاهر = أي أن  $هـ \approx \dots$  ولذلك على ربان الطائرة أن يوجه الطائرة باتجاه  $\dots$  بزاوية  $\dots$

## ثانياً- جمع المتجهات جبرياً:

جمع المتجهات هندسياً يحتاج إلى دقة في الرسم؛ لذلك نلجأ إلى طريقة الجمع جبرياً. حيث إنه إذا كان  $\vec{أ} = (أ_١، أ_٢)$ ،  $\vec{ب} = (ب_١، ب_٢)$  متجهين في الوضع القياسي، فإن حاصل جمع المتجهين هو المتجه  $\vec{أ} + \vec{ب} = (أ_١ + ب_١، أ_٢ + ب_٢)$ .

## مثال ٢:

إذا كانت  $\vec{أ} = (٣، ١)$ ،  $\vec{ب} = (٢، ١-)$ ،  $\vec{ج} = (١-، ٢)$  أجد:

١  $\vec{أ} + \vec{ب} = \vec{ج}$

٢  $\vec{أ} + \vec{ج} = \vec{ب}$

## الحل :

١  $\vec{أ} + \vec{ب} = \vec{ج} \Rightarrow (٣، ١) + (٢، ١-) = (١-، ٢)$

$\vec{ب} - \vec{ج} = \vec{أ} \Rightarrow (٢، ١-) - (١-، ٢) = (٣، ١)$

$\vec{أ} + \vec{ب} + \vec{ج} = (٣، ١) + (٢، ١-) + (١-، ٢) = (٤، ٤)$

٢  $\vec{أ} + \vec{ج} = \vec{ب} \Rightarrow (٣، ١) + (١-، ٢) = (٢، ١-)$

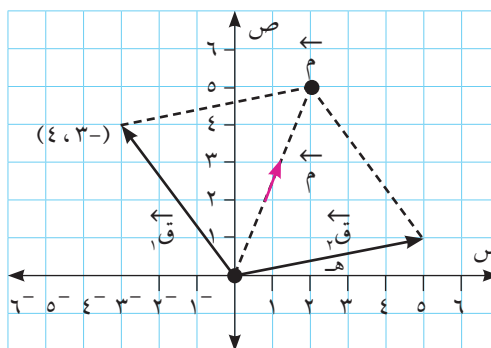
## نشاط ٢:

أثرت قوتان  $\vec{q}_1$  ،  $\vec{q}_2$  في جسم موجود في نقطة الأصل، فتحرك الجسم من نقطة الأصل إلى

النقطة (٥، ٢) فإذا كانت  $\vec{q}_1 = -3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$  (انظر الشكل)

$$\vec{q}_2 = \vec{m} - \vec{q}_1 = \vec{m} - (-3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2) = \vec{m} + 3\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 = (1, 5) = \vec{e}_1 + 5\vec{e}_2$$

$$|\vec{q}_2| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26} \text{ ظاهراً}$$



## ثالثاً - ضرب المتجه بعدد حقيقي

تعريف: إذا كان  $\vec{m}$  متجهاً غير صفري، وكان  $\alpha \in \mathbb{R}$  \*

فإن  $\alpha \vec{m}$  متجه يوازي  $\vec{m}$  طوله  $|\alpha \vec{m}| = |\alpha| |\vec{m}|$

ويكون في نفس اتجاه  $\vec{m}$  إذا كانت  $\alpha$  موجبة وعكس اتجاه  $\vec{m}$  إذا كانت  $\alpha$  سالبة.

## مثال ٣:

إذا كان  $\vec{m} = (2, 4)$  أجد كلا من المتجهات الآتية:

$$1) \vec{m} \quad 2) \vec{m} \quad 3) \vec{m} \quad 4) \vec{m}$$

## الحل:

$$1) \vec{m} = (2, 4) = 2(1, 2)$$

$$2) \vec{m} = (2, 4) = 2(1, 2)$$

$$3) |\vec{m}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$4) |\vec{m}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

تعريف: إذا كان  $\vec{m}$  متجهًا غير صفري، فإن متجه الوحدة باتجاه  $\vec{m}$  هو  $\hat{m}$  حيث  $\hat{m} = \frac{\vec{m}}{|\vec{m}|}$

مثال ٤: إذا كان  $\vec{m} = -3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$  أجد متجه وحدة باتجاه  $\vec{m}$

الحل:  $|\vec{m}| = 5$  وحدات (لماذا؟)

متجه الوحدة باتجاه  $\vec{m} = \hat{m} = \frac{\vec{m}}{|\vec{m}|} = \left(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}\right)$  (تحقق أن طوله = 1 وحدة)

نشاط ٢: إذا كان  $\vec{m} = 3\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$  وكان أ (٢، -١)، ب (٦، ٢) أجد ما يلي:

١)  $\vec{AB}$  في الوضع القياسي = \_\_\_\_\_

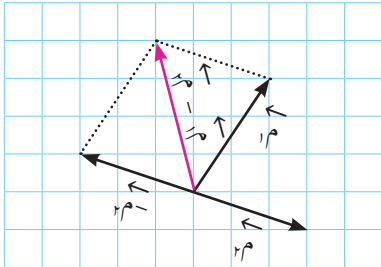
٢)  $\vec{m} + \vec{AB} =$  \_\_\_\_\_

٣)  $\frac{\vec{m}}{|\vec{m}|} =$  \_\_\_\_\_

### ثالثا- طرح المتجهات:

لترح متجهين فإننا نستخدم الخاصية الآتية:

$$\vec{m}_1 - \vec{m}_2 = \vec{m}_1 + (-\vec{m}_2)$$



مثال ٥: الشكل المجاور يوضح عملية طرح متجهين.

أفكر وأناقش: في الشكل السابق ما العلاقة بين  $\vec{m}_1 + \vec{m}_2$ ،  $\vec{m}_1 - \vec{m}_2$ ؟

نشاط ٣: إذا كان  $\vec{m} = (-2, 5)$ ،  $\vec{n} = (3, 4)$  فإن  $\vec{m} - 2\vec{n} =$  (\_\_\_\_، \_\_\_\_)

## الخواص الأساسية للعمليات على المتجهات:

إذا كان  $\vec{a}$  ،  $\vec{b}$  ،  $\vec{c}$  ثلاثة متجهات في المستوى وكانت أ ، ب  $\exists$  ح فإن:

١ (الخاصية التبديلية)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

٢ (الخاصية التجميعية)  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

٣ (العنصر المحايد)  $\vec{a} = \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a}$

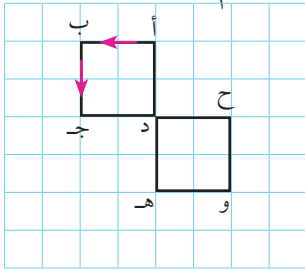
٤ (النظير الجمعي)  $-\vec{a} = \vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a}$

٥  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

٦  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

٧  $|\vec{a}| = |-\vec{a}|$

يمثل الشكل المجاور مربعين متطابقين، إذا كان  $\vec{a} = \vec{b}$  ،  $\vec{c} = \vec{d}$  ،  $\vec{e} = \vec{f}$  ،  $\vec{g} = \vec{h}$



أجد كلاً مما يلي بدلالة  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$ :

\_\_\_\_\_ =  $\vec{a} + \vec{b}$

\_\_\_\_\_ -  $\vec{a} = \vec{b}$

\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ +  $\vec{d}$  + \_\_\_\_\_ +  $\vec{c}$  =  $\vec{b}$

مثال ٦: إذا كان  $\vec{a} = (-2, 4)$  ،  $\vec{b} = (6, 2)$  ، أجد المتجه  $\vec{s}$  الذي يحقق المعادلة الآتية:

$2\vec{s} - \vec{a} = 3\vec{b}$

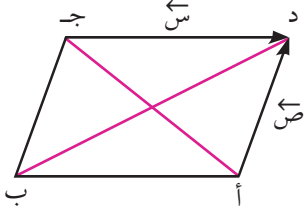
الحل: بإضافة  $\vec{a}$  إلى طرفي المعادلة تصبح  $2\vec{s} = 3\vec{b} + \vec{a}$

ثم نضرب المعادلة في  $\frac{1}{2}$  فتصبح  $\vec{s} = \frac{1}{2}(3\vec{b} + \vec{a})$

ومنها  $\vec{s} = (5, 8)$



## تمارين ومسائل ٣-١



١ الشكل المجاور يمثل متوازي أضلاع،

اكتب المتجهين أ ج ، د ب بدلالة س ، ص

٢ إذا كان  $\vec{a} = (5, 3)$  ،  $\vec{b} = 3\vec{a} + \vec{c}$  و  $\vec{c} = 4\vec{a} + \vec{b}$  ، اكتب  $5\vec{a} + 2\vec{b}$  بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين.

٣ إذا كانت أ  $(-3, 1)$  ، ب  $(2, 1)$  ، ج  $(4, 4)$  ، د  $(-1, 4)$  ، أثبت باستخدام المتجهات أن الشكل أب ج د متوازي أضلاع.

٤ إذا كانت أ  $(س, ٢-)$  ، ب  $(٥, س)$  أجد قيمة/ قيم س التي تجعل طول المتجه  $\vec{a} = ٥$  وحدات

٥ أحل المعادلة المتجهية الآتية حيث  $\vec{a} = (3, -٥)$  ،  $\vec{b} = (2, -٦)$

$$٤\vec{s} - ٢\vec{a} = ٣\vec{b}$$

٦ أثرت قوتان في جسم بحيث إن  $\vec{c} = ٢\vec{a} + ٤\vec{b}$  ،  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$  ، أجد  $\vec{c} = (٧, ٥)$  بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين.

٧ إذا كان  $\vec{a} = (-٢, ٦)$  أجد:

أ متجه طوله ٥ وحدات وعكس اتجاه  $\vec{a}$

ب متجه طوله ٥ أمثال  $\vec{a}$  وبنفس اتجاه  $\vec{a}$



نشاط ١:

تقوم رافعة برفع حجارة وموادّ بناء في منشأة قيد الإنشاء، فإذا تم رفع جسر حديد مركز ثقله يقع في النقطة أ (١٠، ٤، ١) إلى النقطة ب (٢٠، ٨، ١٤) (الوحدات بالأمتار ونقطة الأصل تمثل قاعدة الرافعة)، فإنّ:

$$\begin{aligned} \vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} &= (\underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}) \\ \text{متجه الوحدة السيني} &= \vec{u}_1 = (1, 0, 0) \\ \text{متجهه الوحدة الصادي} &= \vec{u}_2 = (0, 1, \dots) \\ \text{ويمكن تعريف متجه الوحدة العيني} &= \vec{u}_3 = (0, 0, 1) \\ \text{بدلالة متجهات الوحدة} & \vec{AB} = \underline{\quad} \vec{u}_1 + \underline{\quad} \vec{u}_2 + \underline{\quad} \vec{u}_3 \end{aligned}$$

أتعلم: يمكن تطبيق جميع العمليات على المتجهات في المستوى على المتجهات في الفراغ.

نشاط ٢:

أطلق صاروخ من نقطة إحداثياتها أ (١، ٣، ٢) وبعد مدة من الزمن وصل إلى النقطة ب (٣٠، ٤٥، ٢٠)، فإذا كانت نقطة الأصل تمثل قيمة برج المراقبة وكانت الوحدات بالكيلومتر، فإنّ:

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= (\underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}) = (20 - 1, 45 - 3, 20 - 2) = (19, 42, 18) \\ \vec{AB} &= \underline{\quad} \vec{u}_1 + \underline{\quad} \vec{u}_2 + \underline{\quad} \vec{u}_3 \end{aligned}$$

مثال ١:

إذا كان  $\vec{m} = \vec{b} - \vec{a}$  و  $\vec{a} = 2\vec{u}_1 + 5\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3$  وكان  $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} - 6\vec{u}_3$  أجد:

أ، ب، جـ علماً بأن  $\vec{m} + \vec{a} = (9, -3, جـ)$

الحل :

$$\begin{aligned} \vec{m} + \vec{a} &= (\vec{b} + \vec{a} - 2\vec{u}_1 - 5\vec{u}_2 - 3\vec{u}_3) + (\vec{a} + \vec{b} - 6\vec{u}_3) = 2\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{u}_1 - 5\vec{u}_2 - 9\vec{u}_3 \\ &= 2(2\vec{u}_1 + 5\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3) + \vec{b} - 2\vec{u}_1 - 5\vec{u}_2 - 9\vec{u}_3 = 2\vec{b} + 4\vec{u}_1 + 10\vec{u}_2 + 6\vec{u}_3 - 2\vec{u}_1 - 5\vec{u}_2 - 9\vec{u}_3 \\ &= 2\vec{b} + 2\vec{u}_1 + 5\vec{u}_2 - 3\vec{u}_3 \end{aligned}$$

مثال ٢ :

إذا كانت  $\vec{A} = (-6, 4, 2)$  و  $\vec{B} = (8, -2, 4)$  أجد ما يلي:

- ١ متجه يوازي  $\vec{A}$  وطوله ٣ أمثال طول  $\vec{A}$ .
- ٢ متجه عكس اتجاه  $\vec{A}$  وطوله ٣ وحدات.

الحل :

١  $\vec{A} = (-6, 4, 2) - (8, -2, 4) = (-14, 6, -2)$

لايجاد متجه طوله ٣ أمثال  $\vec{A}$  ويوازيه نضرب  $\vec{A}$  في  $\pm 3$

فيصبح  $\pm 3(-14, 6, -2)$

٢ نجد أولاً متجه وحدة باتجاه  $\vec{A}$  وهو  $\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \left( \frac{-14}{\sqrt{236}}, \frac{6}{\sqrt{236}}, \frac{-2}{\sqrt{236}} \right)$

نضرب متجه الوحدة في -٣ فيكون المتجه المطلوب  $\left( \frac{42}{\sqrt{236}}, \frac{-18}{\sqrt{236}}, \frac{6}{\sqrt{236}} \right)$

نشاط ٣ :

إذا كان  $\vec{A} = (-2, 9, 5)$  ،  $\vec{B} = (س + ١, ص^٢, \frac{ع}{٢})$  أجد  $س, ص, ع$   
 علماً بأن :  $\vec{A} = \vec{B}$

$س + ١ =$  \_\_\_\_\_ ومنها  $س =$  \_\_\_\_\_

$ص^٢ =$  \_\_\_\_\_ ومنها  $ص =$  \_\_\_\_\_

$\frac{ع}{٢} =$  \_\_\_\_\_ ومنها  $ع =$  \_\_\_\_\_

نشاط ٤ :

إذا كان  $\vec{A} = ٣ + ٢\vec{B} + \vec{C}$  و  $\vec{B} = (٣, ٥, ٨)$  أجد ما يلي:

١  $٢\vec{A} + ٣\vec{B} =$  \_\_\_\_\_

٢  $|\vec{A}| + |\vec{B}| =$  \_\_\_\_\_

٣  $|\vec{A} + \vec{B}| =$  \_\_\_\_\_

٤ متجه وحدة باتجاه  $\vec{A} =$  \_\_\_\_\_

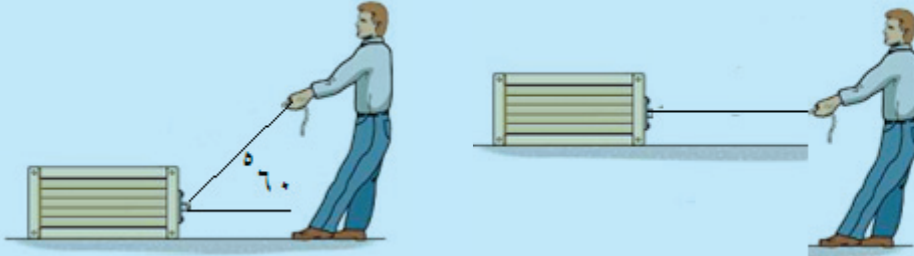
٥ متجه وحدة باتجاه  $\vec{B} =$  \_\_\_\_\_

٦ متجه عكس اتجاه  $\vec{A} + \vec{B}$  وطوله ٤ وحدات = \_\_\_\_\_

## تمارين ومسابئ ١ - ٤

- ١ أثرت قوتان في جسم، فإذا كانت  $\vec{C} = 3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3$  أثرت قوتان في جسم، فإذا كانت  $\vec{C} = 2\vec{u}_1 + 4\vec{u}_2 + 5\vec{u}_3$  أجد محصلة هاتين القوتين.
- ٢ إذا كانت أ (-٦، ٢، ٣) ، ب (٢، ٤، ٨) أجد ما يلي:
- أ متجه طوله ٤ أمثال  $\vec{A}$  ويوازيه.
- ب متجه طوله ٤ وحدات وبنفس اتجاه  $\vec{A}$ .
- ج متجه وحدة عكس اتجاه  $\vec{A}$ .
- ٣ إذا كان  $\vec{A} = (-٢، ٤، ٦)$  وكان  $\vec{A} = 2\vec{A} + 3\vec{B} = 2\vec{u}_1 - 23\vec{u}_2$  أجد  $\vec{B}$  بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.
- ٤ إذا كان  $\vec{A} + \vec{B} = (-٢، ٤، ١)$  وكان  $\vec{A} = 2\vec{A} - 3\vec{B} = 7\vec{u}_1 - \vec{u}_2 - 13\vec{u}_3$  أجد  $|\vec{A} - \vec{B}|$ .

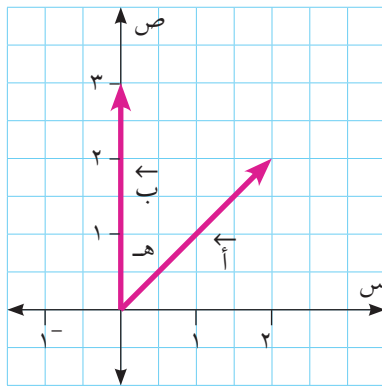
أفكر وأناقش: أراد سعيد أن يسحب صندوقين لهما نفس الكتلة، فإذا سحب الصندوق الأول بحبل أفقي مسافة ٦ م نحو الشرق، ثم سحب الصندوق الثاني بنفس القوة ونفس المسافة والاتجاه بحبل يميل عن الأفقي بزاوية قياسها  $60^\circ$ . في أي الحالتين أنجز شغلاً أكبر وما الوحدة المستخدمة في الشغل؟



تعريف: إذا كان  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  متجهين، فإن الضرب القياسي لهذين المتجهين هو  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ . حيث  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$  حيث  $\theta$  الزاوية الصغرى المحصورة بين المتجهين  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  حيث  $\theta \in [0, \pi]$ .

أفكر وأناقش: حاصل الضرب القياسي (الداخلي) لأي متجهين كمية قياسية وليس كمية متجهة.

مثال ١: إذا كان  $\vec{a} = (2, 2)$ ،  $\vec{b} = (3, 0)$ ، أجد  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  باستخدام تعريف الضرب الداخلي للمتجهات.



الحل:

بتمثيل المتجهين هندسياً في المستوى، فإن قياس الزاوية المحصورة بين المتجه  $\vec{a}$  والاتجاه الموجب لمحور السينات

يساوي  $45^\circ$  لماذا؟ ومنها ينتج أن:  $\theta = 45^\circ$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 2\sqrt{2} \times 3 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 6$$

$$6 = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 3 \times \sqrt{8} = 6 \text{ وحدات شغل}$$

نشاط ٢: ما قيمة ١  $\overleftarrow{و١} \cdot \overleftarrow{و١}$  و ٢  $\overleftarrow{و٢} \cdot \overleftarrow{و٢}$  و ٣  $\overleftarrow{و٢-٠} \cdot \overleftarrow{و٢}$

الحل : ١  $\overleftarrow{و١} \cdot \overleftarrow{و١} = |\overleftarrow{و١}| |\overleftarrow{و١}|$  جتا ٩٠ = \_\_\_\_\_  
 ٢  $\overleftarrow{و٢} \cdot \overleftarrow{و٢} =$  \_\_\_\_\_  
 ٣  $\overleftarrow{و٢-٠} \cdot \overleftarrow{و٢} =$  \_\_\_\_\_

### خصائص ضرب (الداخلي) القياسي:

إذا كان  $\overleftarrow{أ}$  ،  $\overleftarrow{ب}$  ،  $\overleftarrow{ج}$  متجهات غير صفرية و كان  $\exists \text{ ح}^*$  ، فإن

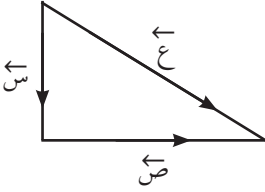
- ١  $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{أ} = |\overleftarrow{أ}|^2$  لماذا؟
- ٢  $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب} = \overleftarrow{ب} \cdot \overleftarrow{أ}$  (الخاصية التبديلية) لماذا؟
- ٣  $\overleftarrow{أ} \cdot (\overleftarrow{ب} + \overleftarrow{ج}) = (\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب}) + (\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ج})$  (التوزيع من اليمين)
- ٤  $\overleftarrow{ب} \cdot (\overleftarrow{ج} + \overleftarrow{أ}) = \overleftarrow{ب} \cdot \overleftarrow{ج} + \overleftarrow{ب} \cdot \overleftarrow{أ}$  (التوزيع من اليسار)
- ٥  $\overleftarrow{ب} \cdot (\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{د}) = (\overleftarrow{ب} \cdot \overleftarrow{أ}) \cdot \overleftarrow{د}$  لكل  $\exists \text{ ح}^*$

أفكر وأناقش: هل يوجد للتعبير  $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب} \cdot \overleftarrow{ج}$  معنى؟

نشاط ٣: أثبت أن:  $|\overleftarrow{أ}| + |\overleftarrow{ب}| \geq |\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}|$   
 $|\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}|^2 = (\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}) \cdot (\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب})$   
 $= |\overleftarrow{أ}|^2 + |\overleftarrow{ب}|^2 + 2\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب}$   
 $= \text{_____} + \text{_____} + 2|\overleftarrow{أ}| |\overleftarrow{ب}| \cdot \text{اجتاهـ}$   
 $\geq |\overleftarrow{أ}|^2 + |\overleftarrow{ب}|^2 + 2|\overleftarrow{أ}| |\overleftarrow{ب}|$  (لماذا؟)  
 $\geq ( \text{_____} + \text{_____} )^2$   
 ومنها  $|\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}| \geq |\overleftarrow{أ}| + |\overleftarrow{ب}|$

استخدم الضرب الداخلي؛ لإثبات نظرية فيثاغورس

مثال ٢ :



الحل :

$$\vec{ع} = \vec{ص} + \vec{س}$$

$$\vec{ع} \cdot \vec{ع} = (\vec{ص} + \vec{س}) \cdot (\vec{ص} + \vec{س})$$

$$|\vec{ع}|^2 = |\vec{ص}|^2 + |\vec{س}|^2 + 2 \cdot \vec{ص} \cdot \vec{س}$$

$$|\vec{ع}|^2 = |\vec{ص}|^2 + |\vec{س}|^2 \quad \text{لماذا؟}$$

نظرية : إذا كان  $\vec{أ} = (أ_١, أ_٢)$  ،  $\vec{ب} = (ب_١, ب_٢)$  فإن  $\vec{أ} \cdot \vec{ب} = أ_١ ب_١ + أ_٢ ب_٢$

البرهان :  $\vec{أ} = أ_١ \vec{و}_١ + أ_٢ \vec{و}_٢$  ،  $\vec{ب} = ب_١ \vec{و}_١ + ب_٢ \vec{و}_٢$

$$\vec{أ} \cdot \vec{ب} = (أ_١ \vec{و}_١ + أ_٢ \vec{و}_٢) \cdot (ب_١ \vec{و}_١ + ب_٢ \vec{و}_٢)$$

$$= أ_١ ب_١ + أ_٢ ب_٢ \quad \text{لماذا؟}$$

ويمكن تعميم النظرية من المستوى إلى الفراغ كما يلي :

إذا كان  $\vec{أ} = (أ_١, أ_٢, أ_٣)$  ،  $\vec{ب} = (ب_١, ب_٢, ب_٣)$

$$\vec{أ} \cdot \vec{ب} = أ_١ ب_١ + أ_٢ ب_٢ + أ_٣ ب_٣$$

مثال ٣ : إذا كان  $\vec{أ} = (٣, ٥, -١)$  ،  $\vec{ب} = (٢, -٢, ٤)$  أجد  $\vec{أ} \cdot \vec{ب}$

الحل :

$$\vec{أ} \cdot \vec{ب} = ٣ \times ٢ + ٥ \times (-٢) + (-١) \times ٤ = -٨$$

الحل :

نشاط ٣ : إذا كان  $\vec{أ} = (٣, ٠)$  ،  $\vec{ب} = (٠, ٤)$

١ أعيّن المتجهين في المستوى الديكارتي. ٢ أجد  $\vec{أ} \cdot \vec{ب}$  ، فسّر إجابتك.

$$\vec{أ} \cdot \vec{ب} = |\vec{أ}| \cdot |\vec{ب}| \cdot \cos \theta = \text{_____}$$

نتيجة: يكون المتجهان غير الصفرين  $\vec{أ}$  ،  $\vec{ب}$  متعامدين إذا وفقط إذا كان  $\vec{أ} \cdot \vec{ب} = ٠$  صفرًا

مثال ٤ :

أبين أن كل زوجين من المتجهات الآتية متعامدان :

$$① \quad \vec{a} = (2, -4, 2), \quad \vec{b} = (5, 1, 3)$$

$$② \quad \vec{a} = \vec{a}_1, \quad \vec{b} = \vec{a}_2 \text{ في الفراغ}$$

الحل :

$$① \quad \vec{a} \perp \vec{b} \text{ إذن } 10 - 4 + 6 = (5, 1, 3) \cdot (2, -4, 2) = 0$$

$$② \quad \vec{a} \perp \vec{b} \text{ إذن } 0 = (0, 1, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0$$

مثال ٥ :

إذا كان  $\vec{a} = (2 \text{ جاس}, \text{ جاس})$ ،  $\vec{b} = (1 \text{ جاس}, 1)$  متعامدين، ما قيمة / قيم س :

$$\text{س} \in [\pi, 2\pi] ?$$

الحل :

$$0 = (2 \text{ جاس}, \text{ جاس}) \cdot (1 \text{ جاس}, 1)$$

$$0 = \text{جاس} + \text{جاس}^2$$

$$0 = \text{جاس} (2 + \text{جاس})$$

$$0 = \text{جاس}$$

$$\text{ومنها } \text{جاس} = 0, \pi, 2\pi \text{ (ترفض)}$$

$$\text{أو جاس} = -2 = \pi - \frac{1}{3} \text{ ومنها } \text{س} = \left\{ \pi - \frac{1}{3}, \pi + \frac{1}{3} \right\}$$

نظرية: إذا كان المتجه  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  وكانت  $h_1, h_2, h_3$  قياسات الزوايا التي يصنعها المتجه مع المحاور الإحداثية الموجبة س، ص، ع على الترتيب، فإن:

$$① \quad \text{جتا } h_1 = \frac{a_1}{|\vec{a}|}, \quad \text{جتا } h_2 = \frac{a_2}{|\vec{a}|}, \quad \text{جتا } h_3 = \frac{a_3}{|\vec{a}|}$$

$$② \quad \text{جتا } h_1^2 + \text{جتا } h_2^2 + \text{جتا } h_3^2 = 1$$

تسمى الزوايا  $h_1, h_2, h_3$  الزوايا الاتجاهية للمتجه  $\vec{a}$ ، وهي الزوايا التي تحدد اتجاه المتجه في الفراغ.



مثال ٦ : ١ أجد قياسات الزوايا التي يصنعها المتجه  $\vec{A} = (1, 0, \sqrt{3})$  مع المحاور الإحداثية.

٢ أبن أن:  $\cos \theta_1 = \cos \theta_2 + \cos \theta_3 = 1$

الحل : ١ جتا  $\theta_1 = \frac{A_1}{|\vec{A}|} = \frac{1}{2}$  ومنها  $\theta_1 = 60^\circ$

جتا  $\theta_2 = \frac{A_2}{|\vec{A}|} = \frac{0}{2} = 0$  ومنها  $\theta_2 = 90^\circ$

جتا  $\theta_3 = \frac{A_3}{|\vec{A}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ومنها  $\theta_3 = 30^\circ$

٢ جتا  $\theta_1 = \cos \theta_2 + \cos \theta_3 = \frac{1}{2} + 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$

بالإضافة الى الضرب الداخلي (القياسي) للمتجهات الذي تعرفت عليه في هذا البند فهناك ضرب آخر للمتجهات يسمى الضرب الخارجي (المتجهي) Cross Product وله تطبيقات فيزيائية مثل العزم والقوة المؤثرة على جسم يسير في مجال مغناطيسي ويمكن تعريفه كما يلي:

$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta \vec{n}$  ، حيث  $\vec{n}$  متجه وحدة عمودي على كل من المتجهين  $\vec{A}$  ،  $\vec{B}$  ،  $\theta$  الزاوية الصغرى المحصورة بين المتجهين  $\vec{A}$  ،  $\vec{B}$  ويتم تحديد اتجاهه باستخدام قاعدة اليد اليمنى .

مثال ٧:

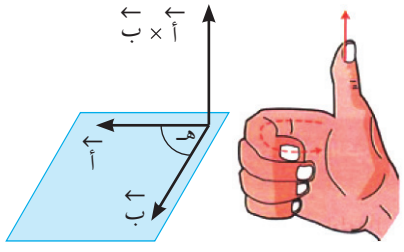
إذا كان  $|\vec{a}| = 8$  وحدات،  $|\vec{b}| = 6$  وحدات  $\theta = 30^\circ$ ، اجد ما يلي:

١  $\vec{a} \times \vec{b}$       ٢  $|\vec{a} + \vec{b}|$

الحل:

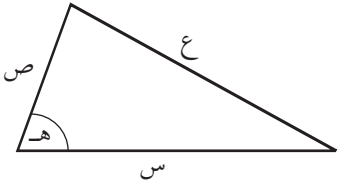
١  $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta = 8 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 24 \vec{n}$

ولتحديد اتجاهه نستخدم قاعدة اليد اليمنى كما يلي بحيث نوجه أصابع اليد اليمنى باتجاه  $\vec{a}$  ثم نحرك الأصابع باتجاه  $\vec{b}$  فيكون اتجاه الإبهام هو اتجاه  $\vec{a} \times \vec{b}$



ألاحظ أن:  $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

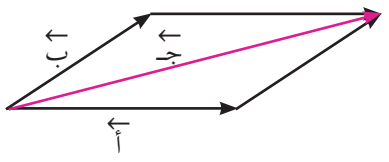
أتعلم: قانون جيب التمام هو تعميم لنظرية فيثاغورس ففي المثلث المجاور:  
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$



٢ نفرض أن:  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$  هو متجه له مقدار واتجاه، ولتحديد المقدار نستخدم قانون جيب التمام كما يلي:

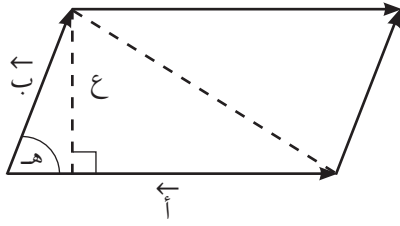
$|\vec{c}|^2 = |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos \theta$

(لماذا تحولت الإشارة من سالب إلى موجب؟)



$|\vec{c}|^2 = 64 + 36 + 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 30^\circ \approx 183$

ومنها  $|\vec{c}| \approx 13,5$



بالإضافة للتطبيقات الفيزيائية توجد تطبيقات هندسية على الضرب  
الخارجي (المتجهي) وهي إيجاد مساحة متوازي الأضلاع ومساحة  
المثلث ففي الشكل المجاور

مساحة متوازي الأضلاع = القاعدة × الارتفاع

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta = c \cdot |\vec{a}| =$$

مساحة المثلث =  $\frac{1}{2}$  مساحة متوازي الأضلاع المشترك معه في القاعدة والارتفاع.

## تمارين و مسائل ١ - ٥

١ أجد ما يلي :

أ  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  . علماً بأن:  $\vec{a} = (0, 3, 5)$  ،  $\vec{b} = (-1, 2, 2)$

ب  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  و  $\vec{a} \cdot \vec{c}$

٢ أجد قياس الزاوية المحصورة بين المتجهين  $(1, 4, 3)$  ،  $(3, 12, 9)$

٣ أجد قيمة  $\sin$  فيما يلي :

أ إذا كان  $\vec{a} = (\sqrt{3}, 3)$  ،  $\vec{b} = (-\sqrt{3}, 3)$  وقياس الزاوية بينهما  $60^\circ$

ب إذا كان  $\vec{a} = (3 \cos \theta, -3 \sin \theta)$  ،  $\vec{b} = (3 \cos \theta, 1 + 3 \sin \theta)$  ، وكان  $\vec{a} \perp \vec{b}$   $\sin \theta \in [0, \pi]$  .

٤ إذا كانت نقطة تقع في الثمن الأول وكانت قياسات الزوايا الاتجاهية للمتجه  $\vec{a}$  هي  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$

بحيث إن:  $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$  ،  $\theta_2 = \frac{\pi}{3}$  ، ما قياس الزاوية  $\theta_3$  ؟

٥ أثبت باستخدام المتجهات أن قطري المعين متعامدان .

٦ إذا كان مقدار الشغل الناتج عن القوة  $\vec{c} = (2, 2, 1)$  والتي تؤثر في جسم باتجاه يصنع زاوية قياسها

$45^\circ$  باتجاه الحركة هو ٨ وحدات شغل، فما مقدار المسافة التي تحركها الجسم؟

٧ إذا كان  $\vec{a}$  يعامد  $\vec{b}$  ، وكان  $\vec{a}$  يعامد  $\vec{c}$  أثبت أن  $\vec{a}$  يعامد  $\vec{d}$

حيث  $\vec{d} = m\vec{b} + n\vec{c}$  ،  $m, n \in \mathbb{R}$  .\*

٨ إذا كان  $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{40}$  ،  $|\vec{a}| = 16$  ،  $|\vec{b}| = 5$

أ أجد الزاوية بين المتجهين  $\vec{a}$  ،  $\vec{b}$  . ب أجد  $|\vec{a} + \vec{b}|$



نشاط ١:

ضمن الأنشطة اللاصفية قام معلم مدرسة الأقصى باصطحاب الطلبة لزيارة بناء قيد الإنشاء، لاحظ الطلاب أن عاملاً قد كون زاوية قائمة باستخدام الخيوط فسأل الطالب العامل: كيف تتأكد أن هذه الزاوية قائمة فأجابه العامل بأنه يكون مثلثاً أطوال أضلاعه ٦٠ سم، ٨٠ سم، ١٠٠ سم، ويكون هذا المثلث قائم الزاوية.

فسأل المعلم الطلبة بماذا تذكركم هذه الأعداد هندسياً؟ \_\_\_\_\_

وهل يوجد قياسات أخرى يمكن استخدامها لتكوين زاوية قائمة؟ \_\_\_\_\_

كما لاحظ الطلبة أن العمال يستخدمون ميزان الماء في البناء، لماذا؟

يتكون البناء الرياضي الهندسي من مُسميات أولية ومُسلّمات ونظريات

- المسميات أولية: وهي ليس لها تعريف مثل النقطة والمستقيم والمستوى والفراغ. ويمكن إعطاء أمثلة من الواقع مثل موقع مدينة على الخارطة وحافة مسطرة و ملعب كرة قدم.
- المُسلّمة: هي عبارة رياضية تربط بين المسميات الأولية وتقبل صحتها دون برهان.
- النظرية: عبارة رياضية يمكن إثبات صحتها بالاعتماد على مفاهيم، أو حقائق، أو مُسلّمات أو نظريات سابقة.

وفيما يلي بعض هذه المُسلّمات:

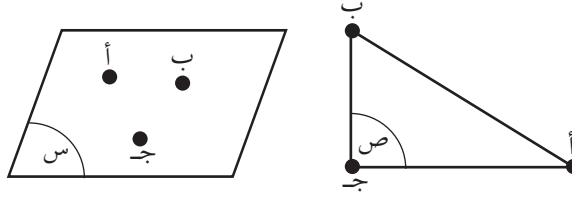
١ مُسلّمة ١: لأي نقطتين مختلفتين في الفراغ يوجد مستقيم واحد فقط يمر بهما.



يسمى المستقيم بنقطتين واقعتين عليه مثل  $\overleftrightarrow{أب}$  أو المستقيم  $\overleftrightarrow{ل}$

أتذكّر: أن النقاط المستقيمة هي النقاط التي تقع على خط مستقيم واحد.

٢ مُسلّمة ٢: المستوى يحتوي على ثلاث نقاط على الأقل ، مختلفة وليست على استقامة واحدة.  
يسمى المستوى أ ب ج ، أو المستوى س

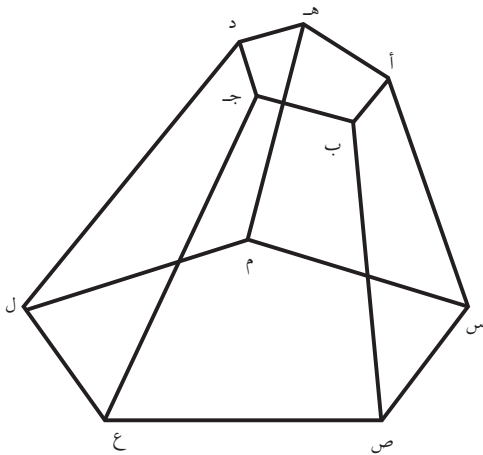


أتعلّم: النقاط المستوية هي النقاط التي تقع في نفس المستوى.

نشاط ٢: يمكن تحديد مستوى واحد فقط ب :

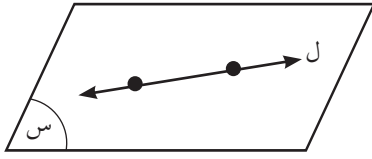
- ١ ثلاث نقاط غير مستقيمة .
- ٢ مستقيم ونقطة \_\_\_\_\_
- ٣ مستقيمين \_\_\_\_\_
- ٤ مستقيمين \_\_\_\_\_

٣ مُسلّمة ٣: الفراغ يحتوي على أربع نقاط على الأقل مختلفة و غير مستوية.

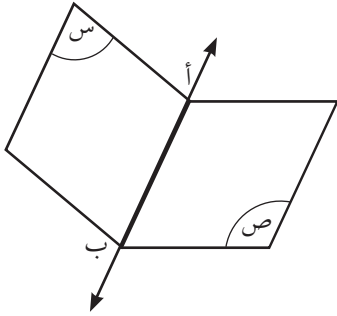


نشاط ٣: من الشكل المجاور أسمى

- أ ٤ مستقييات
  - (١) المستقيم أ ب (٢) \_\_\_\_\_
  - (٣) \_\_\_\_\_ (٤) \_\_\_\_\_
- ب ٤ مستويات
  - (١) المستوى أ ب هـ (٢) \_\_\_\_\_
  - (٣) \_\_\_\_\_ (٤) \_\_\_\_\_



٤ مُسَلِّمة ٤: إذا اشترك المستقيم  $\vec{l}$  والمستوى س في نقطتين مختلفتين، فإنّ المستقيم  $\vec{l}$  يقع بأكمله في المستوى.



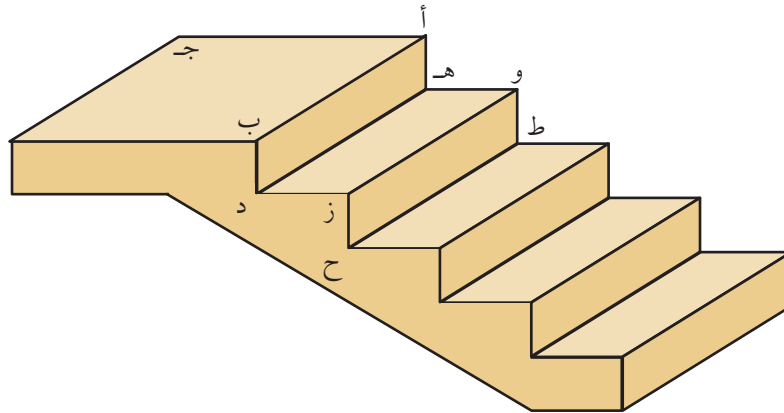
٥ مُسَلِّمة ٥: إذا تقاطع مستويان مختلفان، فإنّ تقاطعهما هو خط مستقيم.

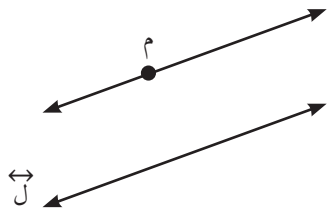
$$\vec{أ ب} = س \cap ص$$

بالاعتماد على الشكل التالي أجب عما يلي :

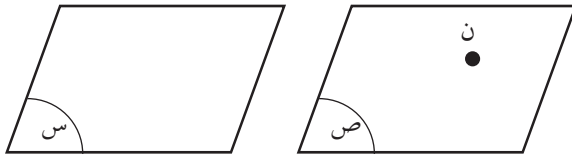
نشاط ٤:

- ١ يجوي الشكل على عدة مستويات منها المستوى أ ب ج د، والمستوى —
- ٢ المستوى أ ب ج د يتقاطع مع المستوى هـ أ ب في —
- ٣ المستقيم وهـ  $\supseteq$  المستوى —  $\vec{أ ب} \cap \vec{ب د} =$  —





٦ مُسَلِّمة ٦: إذا وقعت نقطة خارج مستقيم معلوم فإنه يوجد مستقيم واحد فقط يمرّ بالنقطة ويوازي المستقيم المعلوم.

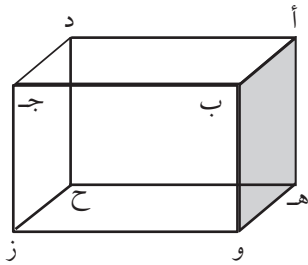


٧ مُسَلِّمة ٧: إذا كانت ن نقطة لا تنتمي للمستوى س فإنه يوجد مستوى واحد فقط يمر بالنقطة ن ويوازي المستوى س.

العلاقة بين مستقيمين في الفراغ :

- ١ مستقيمان متوازيان: وهما مستقيمان يقعان في مستوى واحد ولا يتقاطعان.
- ٢ مستقيمان متقاطعان: وهما مستقيمان يقعان في مستوى واحد ويتقاطعان في نقطة واحدة فقط.
- ٣ مستقيمان متخالفان: وهما مستقيمان لا يتقاطعان ولا يقعان في نفس المستوى.

نشاط ٥: مستعينا بالشكل المجاور فإن هنالك :



- ١ مستقيمين متوازيين مثل المستقيم أب مع المستقيم هـ و  
أيضا \_\_\_\_\_
- ٢ مستقيمين متقاطعين مثل المستقيمين أ د ، د ج  
وأيضا .....
- ٣ مستقيمين متخالفين مثل المستقيمين أب ، و ز  
وأيضا \_\_\_\_\_

لاحظ أن المستقيم ب و عمودي على المستوى هـ و ز إذن فهو عمودي على جميع المستقيمتين الواقعتين في نفس المستوى.

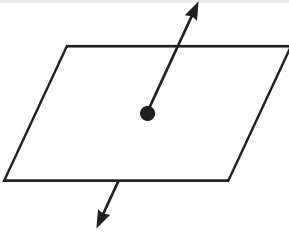
كما أنه إذا كان المستقيم أ د عمودي على المستقيم ج د وكذلك المستقيم أ د عمودي على المستقيم د ح إذن فهو عمودي على المستوى الذي يحويهما وهو د ج ح .

أي أن المستقيم العمودي على المستوى يكون عمودياً على جميع المستقيمتين في المستوى والمستقيم العمودي على مستقيمين غير متوازيين في المستوى يكون عمودياً على المستوى.

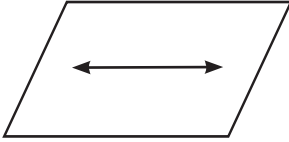
## العلاقة بين مستقيم و مستوى في الفراغ

هنالك ثلاث حالات لها :

١ مستقيم يقطع مستوى في نقطة

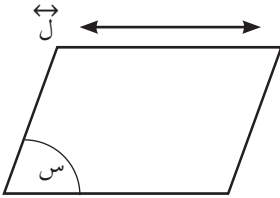


٢ مستقيم يقع بأكمله في المستوى



٣ مستقيم يوازي مستوى وهو مستقيم لا يشترك مع المستوى في أي نقطة

$$\varphi = \text{س} \cap \vec{ل}$$



## العلاقة بين المستويات في الفراغ:

يمكن للمستويات في الفراغ أن:

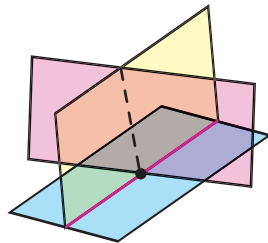
١ تتوازي.

٢ تتقاطع في خط مستقيم.

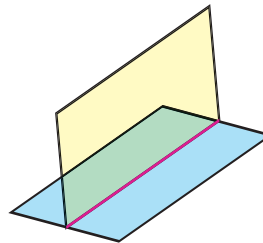
٣ تتقاطع في نقطة. انظر الشكل:

الأشكال الثلاثية الأبعاد

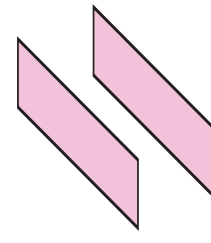
أوضاع المستويات في الفضاء



متقاطعة في نقطة



متقاطعان في مستقيم



متوازيان



## نشاط ٦:

على أي مُسلمة تنطبق الأمثلة التالية :



- ١ يقوم عامل القصاراة باستخدام القطعة المعدنية المستقيمة في عمله لجعل القصاراة مستوية. مسلمة رقم ٤ .

- ٢ يقوم عامل بتثبيت مسمارين و وصل خيط بينهما \_\_\_\_\_
- ٣ يستخدم المصور كاميرا مثبتة على حامل بثلاثة أرجل \_\_\_\_\_
- ٤ سقف غرفة يحتوي على مصباح (أنبوبة فلورسنت) يوازي أرضية الغرفة \_\_\_\_\_

## تمارين و مسائل ١ - ٦

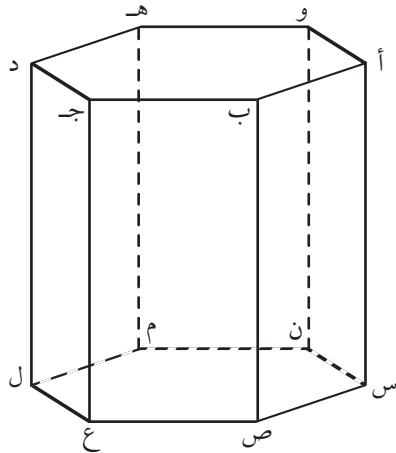
- ١ أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة :
  - ١ المستقيمان العموديان على مستوى واحد  
أ) متوازيان  
ب) متقاطعان في نقطة  
ج) متخالفان  
د) متقاطعان في أكثر من نقطة
  - ٢ أي نقطتين في الفراغ يمر بهما  
أ) مستقيم واحد  
ب) مستقيمان  
ج) ٣ مستقيمتين  
د) عدد لا نهائي من المستقيمتين
  - ٣ المستقيمان اللذان لا يتقاطعان ولا يجمعهما مستوى واحد هما  
أ) متوازيان  
ب) متقاطعان  
ج) متخالفان  
د) متطابقان
  - ٤ إذا كان المستوى س يوازي المستوى ص و كان المستقيم ل  $\perp$  ص فإنَّ المستقيم ل :  
أ) يوازي س  
ب) يعامد س  
ج) يوازي ص  
د) يعامد مستقيم واحد فقط في س
  - ٥ ما عدد نقاط تقاطع مستقيم يقطع مستوى ولا يقع بأكمله في المستوى ؟  
أ) نقطة واحدة  
ب) نقطتين  
ج) ٣ نقاط  
د) عدد لا نهائي من النقاط

٢ أضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة و علامة (×) أمام العبارة الخاطئة فيما يلي مع ذكر السبب في حالة العبارات الخاطئة :

- ١ إذا وقع مستقيمان في مستوى واحد ولم يتقاطعا فإنهما متوازيان.
- ٢ يمكن رسم أكثر من مستقيم يمر بنقطة معلومة عموديا على مستوى معلوم.
- ٣ إذا كان  $s$  ،  $v$  مستويين متوازيين وكان المستقيم  $l \subset s$  ، والمستقيم  $m \subset v$  فإن  $l // m$ .
- ٤ إذا كان  $l_1$  ،  $l_2$  مستقيمين في الفراغ و كان  $s$  مستوى معلوم حيث  $l_1 \perp s$  و  $l_2 \perp s$  فإن  $l_1 // l_2$ .
- ٥ أي ثلاث نقاط تعين مستوى.
- ٦ إذا وازى مستقيم مستوى معلوماً فإنه يوازي جميع المستقيبات الواقعة في ذلك المستوى.
- ٧ المستقيبات العمودية على مستقيم واحد تكون متوازية.
- ٨ من نقطة خارج المستوى  $s$  يمكن رسم مستقيم واحد فقط منها عمودي على المستوى.
- ٩ إذا كان المستقيم  $l //$  المستوى  $s$  فكل المستويات التي تحوي المستقيم  $l //$  المستوى  $s$ .

٣ أذكر عدد المستويات التي يمكن أن تمر بكل مما يلي :

- ١ نقطة معلومة.
- ٢ نقطتين معلومتين.
- ٣ ثلاث نقاط معلومة ليست على استقامة واحدة.



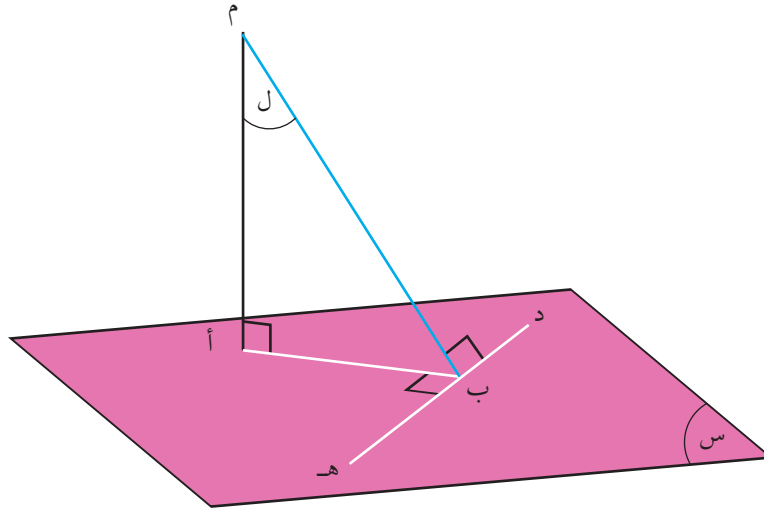
٤ بالاستعانة بالشكل المجاور أعطى امثلة على ما يلي :

- |   |                   |   |                     |
|---|-------------------|---|---------------------|
| ١ | مستقيمان متوازيان | ٢ | مستقيمان متخالفان   |
| ٣ | مستقيمان متعامدان | ٤ | مستويان متقاطعان    |
| ٥ | مستويان متوازيان  | ٦ | مستقيم يقع في مستوى |

افكر وأناقش: سلم متكئ على شجرة عمودية فإذا بدأ السلم بالانزلاق وتوقف عند التقائه بحافة سور، ما قياس الزاوية بين السلم والخط الأفقي الناتج من تقاطع السور القائم مع الأرض الأفقية؟

### نظرية الأعمدة الثلاثة:

إذا رسم من نقطة في مستوى مستقيمان أحدهما عمودي على المستوى، والآخر عمودي على مستقيم معلوم في المستوى، فالمستقيم الواصل بين أية نقطة من نقط المستقيم العمودي على المستوى ونقطة تلاقي المستقيمين يكون عمودياً على المستقيم المعلوم.



الفرضيات المعطاة في النظرية  $\perp$  هـ د،  $\perp$  أ م المستوى س  
المطلوب : إثبات أن  $\perp$  م ب  $\perp$  هـ د حيث م أي نقطة  $\exists$  إلى المستقيم  $\overleftrightarrow{أ م}$   
البرهان : بما أن  $\perp$  أ م المستوى س (من المعطيات) فإن  $\overleftrightarrow{أ م}$  يعامد أي مستقيم  $\perp$  س  
إذن  $\perp$  أ م  $\perp$  هـ د  
وبما أن  $\perp$  أ ب  $\perp$  هـ د من المعطيات  
و  $\perp$  هـ د يعامد كل من أ ب ، أ م إذن  $\perp$  هـ د عمودي على المستوى الوحيد المار بهما وهو ل  
إذن  $\perp$  هـ د عمودي على كل مستقيم موجود في المستوى ل إذن  $\perp$  هـ د  $\perp$  ب م

ملاحظة: عكس النظرية صحيح دائماً  
أي أنه إذا كان  $\perp$  هـ د  $\perp$  ب م وكان  $\perp$  أ م المستوى س فإن  $\perp$  أ ب  $\perp$  هـ د

**نشاط ١:** صالة رياضية على شكل متوازي مستطيلات، ثبت مصدر ضوئي عند نقطة تقاطع قطري سقفها، أثبت أن الشعاع الواصل من مصدر الضوء إلى نقطة منتصف خط تقاطع حائط الصالة مع أرضيتها يكون عمودياً على هذا الخط.

**الحل :**

نفرض أن مصدر الضوء أ،

وأن تقاطع حائط الصالة مع أرضيتها هو هـ د،

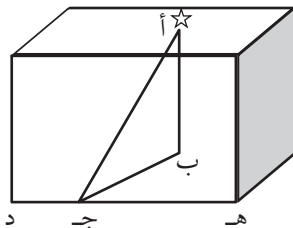
$\perp$  أ ب عمودي على أرضية الصالة

$\perp$  ب ج عمودي على هـ د

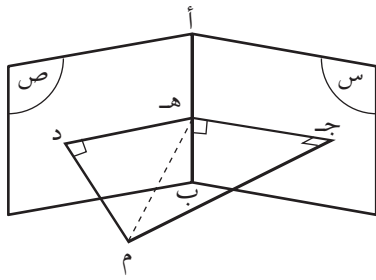
البرهان:  $\perp$  أ ب عمودي على \_\_\_\_\_

وبما أن  $\perp$  ب ج  $\perp$  \_\_\_\_\_

وبحسب نظرية الأعمدة الثلاث فإن  $\perp$  أ ج  $\perp$  \_\_\_\_\_



مثال ٢:



س ، ص مستويان متقاطعان في  $\overleftrightarrow{أب}$  ، م نقطة خارجة  
عنها ، أنزل العمودان م جـ ، م د ، عليهما ليلاقيهما  
على الترتيب في جـ ، د ثم أنزل من جـ العمود جـ هـ  
على  $\overleftrightarrow{أب}$  ، أثبت أن  $\overleftrightarrow{ده} \perp \overleftrightarrow{أب}$

المطلوب: إثبات أن  $\overleftrightarrow{ده} \perp \overleftrightarrow{أب}$

البرهان: م جـ  $\perp$  على المستوى س (من المعطيات)

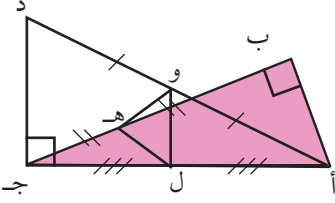
جـ هـ  $\perp$   $\overleftrightarrow{أب}$  (من المعطيات)

إذن م هـ  $\perp$   $\overleftrightarrow{أب}$  (بالاعتماد على النظرية)

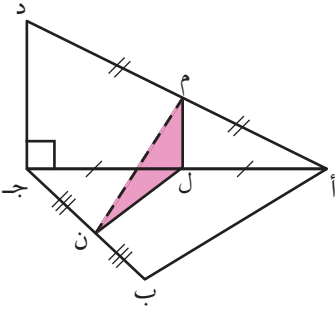
وبما أن م د  $\perp$  على المستوى ص

إذن  $\overleftrightarrow{ده} \perp \overleftrightarrow{أب}$  (بالاعتماد على عكس النظرية)

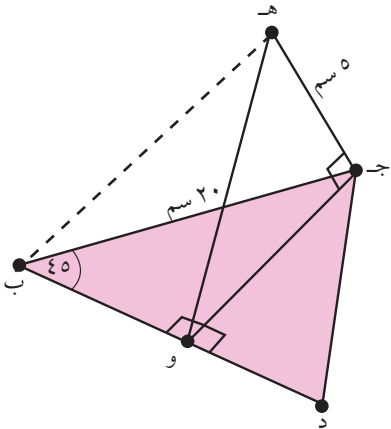
- ١ المثلث  $أ ب ج$  قائم الزاوية في  $ب$ ، رسم  $ج د \perp$  المستوى  $أ ب ج$  ثم وصل  $أ د$ ، نصف  $ب ج$  في  $هـ$ ، وكذلك نصف  $أ د$  في  $و$ .  
أثبت أن:  $و هـ \perp ب ج$ .



- ٢  $أ ب ج$  مثلث رسم  $ج د$  عمودي على المستوى  $أ ب ج$ ، ثم وصل  $د أ$ ، ونصف  $أ د$ ،  $أ ج$ ،  $ب ج$  في  $م$ ،  $ل$ ،  $ن$  على الترتيب. ثم وصل  $م ن$  فكان عمودياً على  $ب ج$ . أثبت أن الزاوية  $أ ب ج$  قائمة.



- ٣  $ب ج$ ،  $ب د$  قطعتان مستقيمتان، الزاوية بينهما  $٤٥^\circ$ ، أنزل من  $ج$  العمود  $ج و$  على  $ب د$ ، فتكون المثلث المتساوي الساقين  $ب و ج$ ، ثم أقيم من  $ج$  العمود  $ج هـ$  على المستوى  $ج ب د$ . أقيم من  $هـ$  العمود  $هـ و$  على  $ب د$ . بحيث كان طول  $ج هـ$   $٥$  سم، وطول  $ج ب$   $٢٠$  سم. أجد طول  $هـ و$ .



- ١ أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يلي:
- ١ ما عدد المستويات التي تمر بمستقيمين متوازيين؟  
 أ) ١      ب) ٢  
 ج) ٠      د) عدد لا نهائي من المستويات
- ٢ ما العلاقة بين المستقيمين المتخالفين؟  
 أ) يقعان في مستوى واحد ولا يتقاطعان.  
 ب) يقعان في مستوى واحد ويتقاطعان.  
 ج) لا يقعان في مستوى واحد ولا يتقاطعان.  
 د) لا يقعان في مستوى واحد ويتقاطعان.
- ٣ ما المسافة بين النقطة أ(٤، ٣، ٢) والمستوى س ع؟  
 أ) ٤      ب) ٣      ج) ٢      د) ١
- ٤ ما قياس الزاوية بين المتجهين  $\vec{A} = (١، ٢)$  و  $\vec{B} = (-١، ٢)$ ؟  
 أ)  $٩٠^\circ$       ب)  $٠$       ج)  $١٨٠^\circ$       د)  $٤٥^\circ$
- ٥ ما قيمة س التي تجعل المتجهين الآتين في نفس الاتجاه؟  $\vec{A} = (٢، س)$  و  $\vec{B} = (٦، ٤)$   
 أ) ٠      ب) ٣      ج) -٣      د) ١
- ٦ إذا كانت أ(-٥، ٤، ٢) وكانت ج(٦، ٣، ٤) تقع في منتصف المسافة بين أ و ب فما إحداثيات النقطة ب؟  
 أ)  $(٣، \frac{٧}{٢}، \frac{١}{٢})$       ب) (١٠، ١٠، ٧)  
 ج) (٤، ١، ١٣)      د) (٦، ٢، ١٧)
- ٧ ما قيمة م الموجبة التي تجعل المتجهين التاليين متعامدين؟  
 $\vec{A} = (١، ٣، م)$  و  $\vec{B} = (١، ٤، -٣)$   
 أ) ٦      ب) ٢      ج) ٤      د) ٣
- ٨ إذا كانت أ(٤، ٤، ٠) ، ب(٤، ٠، ٤) ، ج(٤، ٤، ٠) فما نوع المثلث أ ب ج؟  
 أ) متساوي الأضلاع      ب) قائم الزاوية  
 ج) منفرج الزاوية      د) مختلف الأضلاع

٩ إذا كان  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ ، (أ)  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  متجهين غير صفريين) فما العبارة الصائبة؟

(أ)  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  متعامدين (ب)  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  في نفس الاتجاه

(ج)  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  عكس الاتجاه (د)  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  متجهها وحدة

١٠ أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع طول كل ضلع ٦ سم ما قيمة (٢ أ جـ). (٣ أ ب)؟

(أ) ١٨ (ب) ٣٦ (ج) ٣٠ (د) ١٠٨

٢ ما قياس الزوايا الاتجاهية للمتجه  $\vec{a} = (1, 0, -1)$  على الترتيب؟

٣ إذا كان  $\vec{a} = (س, \sqrt{٧٥}, \vec{b} = (س, ٠, ٠)$ ، أجد قيم س بحيث أن الزاوية المحصورة

بين  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  تساوي  $٦٠^\circ$ .

٤ إذا كان  $\vec{a} = (-١, -٢)$  وكان  $\vec{b} = (م, -١)$ ، أجد م في كل من الحالات الآتية؟

أ  $\vec{a}$  يوازي  $\vec{b}$

ب  $\vec{a}$  عمودي على  $\vec{b}$

جـ قياس الزاوية بين  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  تساوي  $٤٥^\circ$

٥ إذا كانت الزاوية المحصورة بين المتجهين  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  تساوي  $٦٠^\circ$  وكان  $|\vec{a}| = ٤$ ،  $|\vec{b}| = ١٠$

أجد: أ  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  ب  $|\vec{a} + \vec{b}|$  جـ  $|\vec{a} - \vec{b}|$

٦ إذا كانت  $\vec{a} = (٢, ٢)$ ،  $\vec{b} = (-٢, ٥)$ ،  $\vec{c} = (٧, -٥)$ ،  $\vec{d} = (-٣, ٨)$  وكانت

$\vec{m} = ٢\vec{a} + ٣\vec{b} - \vec{c}$  أثبت أن  $\vec{m} \parallel \vec{d}$

٧ باستخدام المتجهات أثبت أن المثلث الذي رؤوسه أ (٧، ١، ٣)، ب (٥، ٣، ٤)، جـ (٣، ٥، ٣)

هو مثلث متساوي الساقين.

٨ إذا كان  $\vec{a} = (١, ٦, ٢)$ ،  $\vec{b} = (٣, م, ٤)$ ،  $\vec{c} = (٤, م, ك)$ ، وكان  $\vec{a} \parallel \vec{b}$  أجد:

أ  $٢|\vec{c}| - ٤|\vec{b}|$  ب  $٤|\vec{b}|$  جـ  $٤|\vec{c}|$  د  $٤|\vec{b}|$

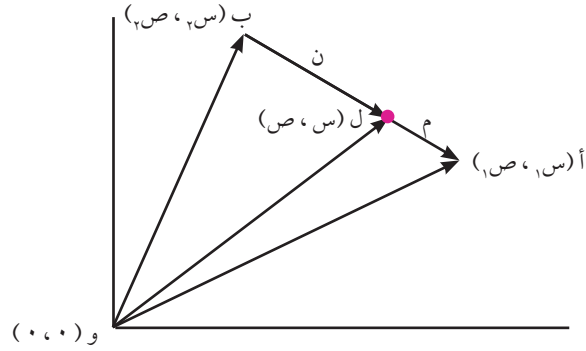
٩  $\vec{a}$  متجه في الفراغ طوله  $٨\sqrt{٣}$  ويصنع زوايا متساوية في القياس مع الاتجاهات الموجبة للمحاور

الإحداثية أكتب  $\vec{a}$  بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.



## فكرة رياضية

- ١ اكتب عن استخدام المتجهات وأهميتها في الحياة العملية والواقع .
- ٢ إيجاد إحداثيات تقسيم قطعة مستقيمة باستخدام المتجهات .
- ٣ قسمت القطعة المستقيمة  $\overline{AB}$  إلى قسمين بنسبة م : ن من جهة أ كما في الشكل الآتي:  
جد باستخدام المتجهات إحداثيات النقطة ل .

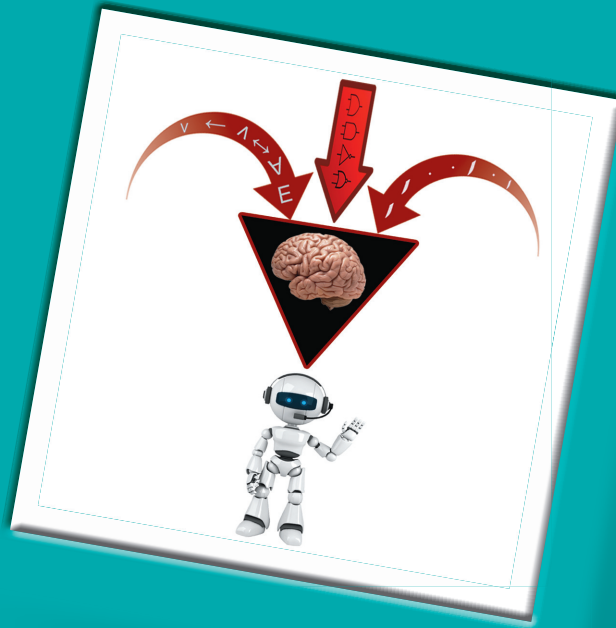


روابط إلكترونية

- <https://www.mathsisfun.com/algebra/vectors.html>
- [https://phet.colorado.edu/sims/vector-addition/vector-addition\\_en.html](https://phet.colorado.edu/sims/vector-addition/vector-addition_en.html)



# المنطق الرياضي



يقول الإمام الغزالي:  
«الإكراه سلاح كلِّ فقيرٍ في براهينه، فاشلٌ في إقناعه، أُعوزُه المنطق فأسعفته العصا»  
أناقش هذه العبارة؟

تنبع أهمية المنطق الرياضي من بحثه في القواعد المتبعة في التفكير، وطرق الاستدلال الصحيح، وذلك بدراسة العبارات الرياضية، والربط بينها، وتقديم طرق البرهان. سعيًا من خلال تدريس محتوى هذه الوحدة للوصول إلى طلبة قادرين على توظيف مفاهيم الوحدة: العبارة الرياضية، وقيم صوابها، ونفيها، وأدوات الربط، وجداول الصواب، وتكافؤ العبارات الرياضية، والجمل المفتوحة وتكافؤها، والعبارات المسورة، وقيم صوابها، ونفيها، وطرق البرهان: المباشر، وغير المباشر، والتناقض، والاستقراء الرياضي.

يتوقع من الطلبة بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن يحققوا الأهداف الآتية:

- ١ التعرف إلى أنواع العبارات الرياضية، وأدوات الربط بينها.
- ٢ التعرف إلى جداول الصواب، وتوظيفها في إثبات تكافؤ العبارات.
- ٣ إثبات صحة بعض العبارات الرياضية جزئياً وكلياً، ونفيها، والحكم على صحتها.
- ٤ والاستقراء الرياضي). (المباشر، وغير المباشر، والتناقض،

## أولاً: العبارة الرياضية

نتحدث ونتحاور ونتناقش في حياتنا اليومية وتعاملاتنا المختلفة بكلمات وجمل، ولعل معجم كل منا يزخر بأمثلة لأنواع من الجمل التي نتحدث بها.

**نشاط ١:** أقرأ الحوار الآتي الذي دار بين الصديقين حسام ويوسف:

**حسام :** هل اطلعت يا يوسف على القانون الأساسي الفلسطيني؟

**يوسف :** لم تسنح لي الفرصة لغاية الآن للاطلاع عليه، أخبرني عن مواد هذا القانون.

**حسام :** ما أكبر سؤالك، يا يوسف! وما أطول إجابته! فهو بحاجة إلى مختص للإجابة عليه، ولكن

سأعطيك بعض الأمثلة التي أعرفها: جاء في (المادة ٢٤) من هذا القانون، «أن التعليم حق لكل مواطن، وإلزامي حتى نهاية المرحلة الأساسية على الأقل، ومجاني في المدارس والمعاهد والمؤسسات العامة».

**يوسف :** وماذا جاء في هذا القانون عن العمل والحياة السياسية، يا حسام؟

**حسام :** جاء في (المادة ٢٥) أن العمل حق لكل مواطن، وهو واجب وشرف، وتسعى السلطة الوطنية

إلى توفيره لكل قادر عليه»، كما جاء في القانون أيضاً «أن التنظيم النقابي حق وينظم القانون أحكامه، والحق في الإضراب يمارس في حدود القانون»، وجاء في (المادة ٢٦) من هذا القانون «أن للفلسطينيين حق المشاركة في الحياة السياسية أفراداً وجماعات، ولهم على وجه الخصوص الحق في تشكيل الأحزاب السياسية، والانضمام إليها، والحق في تشكيل: النقابات، والجمعيات، والاتحادات، والروابط والأندية، والمؤسسات الشعبية وفقاً للقانون».

**يوسف :** لقد أثرت فضولي يا حسام للبحث عن وثيقة القانون الأساسي الفلسطيني؛ لمعرفة حقوقي من

جهة، وما يترتب علي من واجبات من جهة أخرى في مناحي الحياة كافة.

بالرجوع إلى الحوار الذي دار بين الصديقين حسام ويوسف، أعطي مثلاً على:

- |   |            |   |                |   |             |
|---|------------|---|----------------|---|-------------|
| ١ | شبه جملة   | ٢ | جملة استفهامية | ٣ | جملة تعجبية |
| ٤ | جملة خبرية | ٥ | جملة نداء      | ٦ | جملة منفية  |

## العبرة الرياضية : جملة خبرية (إما أن تكون صائبةً، أو خاطئةً، ولا تكون كليهما).

ولكل عبارة رياضية قيمة صواب: إما صائبة ويرمز لها بالرمز (ص) وإما خاطئة ويرمز لها بالرمز (خ). بالرجوع إلى نشاط ١ السابق، وبالاتماد على التعريف، أعطي أمثلةً لعبارات رياضية.

### مثال ١ :

أقرأ ما يأتي، وأبين أيًا منها يمثل عبارة رياضية؟

- ١ ياسر عرفات أول رئيس لمنظمة التحرير الفلسطينية.
- ٢ ما أجمل بحر غزة !
- ٣ الأرض تدور حول الشمس.
- ٤ ما ارتفاع جبل جرزيم؟
- ٥ زويل عالم كيمياء مصري.
- ٦ ١ عدد أولي.
- ٧ فدوى طوقان شاعرة فلسطينية.
- ٨ استمع لنصيحتي.

### الحل :

|            |       |       |       |            |       |            |       |
|------------|-------|-------|-------|------------|-------|------------|-------|
| ٨          | ٧     | ٦     | ٥     | ٤          | ٣     | ٢          | ١     |
| ليست عبارة | عبارة | عبارة | عبارة | ليست عبارة | عبارة | ليست عبارة | عبارة |

### نشاط ٢ :

أكتب قيم صواب العبارات الرياضية الواردة في الجدول الآتي\*:

| الرقم | العبارة الرياضية                                     | قيمة الصواب |
|-------|--|-------------|
| ١     | لقب الخليفة عمر بن الخطاب رضي الله عنه بالفاروق      | ص           |
| ٢     | أعلى جبل في الوطن العربي هو جبل النبي شعيب في اليمن  |             |
| ٣     | نظم سميح القاسم قصيدة الأرض                          |             |
| ٤     | مارك زوكربيرج مؤسس موقع فيس بوك                      |             |
| ٥     | يقبل العدد ٢٢٥ القسمة على ٣ دون باقٍ                 | ص           |
| ٦     | ق(٢) هو أحد أصفار الاقتران ق(س) = س <sup>٣</sup> - ٨ | خ           |

ولتسهيل التعامل مع العبارات الرياضية، فإنه بإمكاننا إعطاء العبارة الرياضية أحد الرموز الهجائية، فيمكن أن نرمز للعبارة الرياضية «النيل أطول نهر في العالم» بالرمز «ف» ونكتب ف: النيل أطول نهر في العالم.

\* يمكن الحصول على بعض المعلومات بالرجوع إلى الشبكة العنكبوتية.

## ثانياً: نفي العبارة الرياضية

يقول الشاعر: وليس عتابُ الناسِ للمرءِ نافعاً إذا لم يكن للمرءِ لُبٌّ يعاتبه

تتعدد في اللغة العربية أدوات النفي، مثل: ليس، لا، لم وغيرها، وهذه الأدوات يمكن أن ننفي العبارة الرياضية، فنفي العبارة الرياضية ف: النيل أطول نهر في العالم هو: النيل ليس أطول نهر في العالم، وتكتب رمزياً ~ ف: ونفي العبارة الرياضية ن: ط  $\subseteq$  ص، هو ~ ن: ط  $\not\subseteq$  ص.

أفكر وأناقش: ما العلاقة بين قيمة صواب العبارة الرياضية ف، وقيمة صواب نفيها؟

أمثال ١: أنفي كل عبارة من العبارات الرياضية الآتية، دون استخدام «ليس صحيحاً أن»:

- ١ منير نايفة عالم ذرة فلسطيني
- ٢ ٩١ عدد أولي
- ٣  $\sqrt[3]{15}$  عدد غير حقيقي
- ٤ ٧ أحد عوامل ٨٣
- ٥  $7- \leq 2$
- ٦  $\frac{3}{2} > \frac{2}{3}$

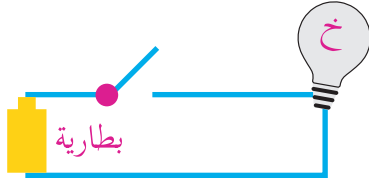
الحل :

| العبارة الرياضية | منير نايفة عالم ذرة فلسطيني     | ٩١ عدد أولي     | $\sqrt[3]{15}$ عدد غير حقيقي | ٧ أحد عوامل ٨٣     | $7- \leq 2$ | $\frac{3}{2} > \frac{2}{3}$    |
|------------------|---------------------------------|-----------------|------------------------------|--------------------|-------------|--------------------------------|
| نفيها            | ليس منير نايفة عالم ذرة فلسطيني | ٩١ عدد غير أولي | $\sqrt[3]{15}$ عدد حقيقي     | ٧ ليس أحد عوامل ٨٣ | $7- > 2$    | $\frac{3}{2} \leq \frac{2}{3}$ |

- ١ أبتن فيما إذا كانت الجملة الآتية تمثل عبارات رياضية أم لا؟
  - أ) يقع المسجد الأقصى في القدس. (ب) سبسطية بلدة أثرية. (ج)  $2^3 = 3^2$
  - د)  $2^2 + 2 = 2^3$  تمثل معادلة دائرة. (هـ) يا طلبتي الأعزاء. (و) سجّل أنا عربي.
- ٢ أبتن قيم الصواب لكل من العبارات الرياضية الآتية:
  - ١) منحنى الاقتران ق(س) =  $\sqrt{s}$  متمثل حول نقطة الأصل.
  - ٢)  $\sqrt[3]{135} > \sqrt[3]{45}$
  - ٣) ق(س) =  $s^2$  اقتران فردي.
  - ٤) العدد  $10^2$  من مضاعفات العدد ٣٢
  - ٥) الصفر عدد نسبي.
  - ٦) المستقيم الذي معادلته  $s = 2$  يعامد المستقيم الذي معادلته  $s = \frac{1}{2}$
- ٣ أنفي العبارات الرياضية الواردة في السؤال السابق.
- ٤ أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:
  - ١) ما الجملة التي تمثل عبارة رياضية فيما يأتي؟
    - أ) ما أعلى البرج!
    - ب) الخوارزمي عالم رياضيات
    - ج) يا مجيب الدعوات
    - د) اشرب العصير
  - ٢) ما الجملة التي لا تمثل عبارة رياضية فيما يأتي؟
    - أ)  $5 = 2 + 3$
    - ب)  $5 < 3 + 2$
    - ج)  $5 \leq 3 + 2$
    - د)  $5 = 3 + 2$
  - ٣) ما نفي العبارة الرياضية  $12 \leq 21$ ؟
    - أ)  $12 \leq 21$
    - ب)  $21 \geq 12$
    - ج)  $12 > 21$
    - د)  $21 \geq 12$
  - ٤) ما العبارة الرياضية التي قيمة صوابها (ص) فيما يأتي؟
    - أ) الزئبق مادة صلبة في الطبيعة.
    - ب) النحاس غير موصل للتيار الكهربائي.
    - ج) النيتروجين من الهالوجينات.
    - د) الأكسجين ضروري للاحتراق.
  - ٥) ما العبارة الرياضية التي قيمة صوابها (خ) فيما يأتي؟
    - أ) رموز نظام العد الثنائي هي ١، ٢
    - ب) رموز نظام العد الثنائي هي ١، ٠
    - ج) ١ جيجا بايت =  $10^9$  بايت
    - د) ١ ميغا بايت =  $10^6$  بايت

### أولاً: جداول الصواب

تعلمت في درس سابق أن العبارة الرياضية ف إما أن تكون صائبة أو خاطئة، أي أن قيمة صوابها يمكن أن تكون صائبة أو خاطئة.



ويمكن أن نمثل العبارة الرياضية بالدائرة الكهربائية.

(أنظر الشكل المجاور) التي لها فرصتان للتشغيل، فإما أن تكون مغلقاً ويقابل ذلك قيمة الصواب (ص)، وإما أن تكون مفتوحاً، ويقابل ذلك قيمة الصواب (خ).

أما إذا كان لدينا العبارتان ف، ن فإن لهاتين العبارتين الرياضيتين معاً أربع حالات لقيم صوابها، وهي: العبارتان صائبتان، أو الأولى صائبة والثانية خاطئة، أو الأولى خاطئة والثانية صائبة، أو الاثنتان خاطئتان، ولتسهيل كتابة إمكانات صواب أو خطأ عبارتين رياضيتين مركبتين معاً، فقد تم تنظيم هذه الإمكانيات في جداول خاصة تسمى جداول الصواب، وهي مفيدة لنا لدراسة العبارات الرياضية المركبة في جوانب عديدة كما سيتضح لاحقاً، والجدول الموضح هو جدول الصواب الخاص بالعبارتين ف، ن

| ن | ف |
|---|---|
| ص | ص |
| خ | ص |
| ص | خ |
| خ | خ |

أفكر وأناقش: عدد الإمكانيات الممكنة لقيم صواب ك عبارة رياضية مركبة يساوي ٢<sup>ك</sup>.

### ثانياً: العبارة الرياضية المركبة

في خضم حديثنا عن التراث الفلسطيني، تتردد بعض الجمل مثل: المسخن أكلة فلسطينية، والخبيصة (حلوى الخروب) من الحلويات الشعبية الفلسطينية التي دأبت على إعدادها الجدّات، والقمباز والكوفية، أو الحطة والعقال، أزياء تراثية طالما ارتداها أجدادنا...

العبارة الرياضية المركبة: هي عبارة رياضية تتكون من عبارتين رياضيتين، أو أكثر تربط بينها أدوات ربط مثل (و)، (أو)، (إذا كان... فإن...)، (إذا فقط إذا...).



## ١ أداة الربط (و) (and)

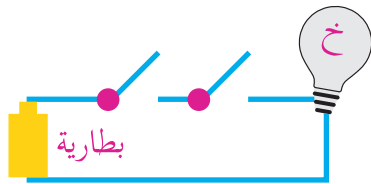
يرمز لأداة الربط (و) بالرمز ٨ .

### نشاط ١:

وعد والد كريم ابنه كريماً بأنه سيصحبه في رحلة إلى بيت لحم، وسيقدم له هدية إن حصل على معدل عالٍ، وبعد حصول كريم على معدل عالٍ، فكر في وعد والده، فوجد إمكانات أربعة لتنفيذ الوالد وعده، فإما أن ينفذ وعده كاملاً، حيث سيصحبه إلى بيت لحم ويقدم له الهدية، وهذا هو السلوك الصائب الذي يتماشى مع القيم الإيجابية السائدة، في الإيفاء بالوعد، وإما ألا ينفذ وعده جزئياً، بمعنى سوف لن يصحبه إلى بيت لحم ولكن سيقدم له هدية، أو سيصحبه إلى بيت لحم ولن يقدم له هدية، أو ألا ينفذ وعده كاملاً أي لن يصحبه إلى بيت لحم ولن يقدم له هدية، ترى كيف تصرف الأب تجاه وعده لابنه؟

إذا رمزنا ف: صحب الأب ابنه كريماً إلى بيت لحم، ن: قدم الأب هدية لكريم، فإنه يمكن بناء جدول الصواب للعبارة الرياضية: ف ٨ ن بإمكاناته الأربعة المقابلة لإمكانات تنفيذ والد كريم للوعد كما يأتي: ويلاحظ من الجدول أن ف ٨ ن تكون صائبة في الحالة الوحيدة التي تكون كل من مركبتها صائبة، وفيما سوى ذلك تكون خاطئة.

| ف | ن | ف ٨ ن |
|---|---|-------|
| ص | ص | ص     |
| ص | خ | خ     |
| خ | ص | خ     |
| خ | خ | خ     |



أفكر وأناقش: ما أوجه الشبه بين قيم الصواب الممكنة للعبارة الرياضية ف ٨ ن وإمكانات تشغيل الدارة الكهربائية ذي المفتاح المزدوج الممثل بالشكل المجاور؟

## نشاط ٢:

أكتب قيمة الصواب لكل من العبارات الرياضية المركبة الآتية في المكان المخصص، موضحاً السبب:

- ١ العسل مفيد لصحة الإنسان، والنحلة حشرة مفيدة للبيئة.
- ٢ ألاحظ أن مركبتي العبارة صحيحتان، وأداة الربط هي (و) لذا فالعبارة المركبة صحيحة.
- ٣ الأسد مفترس، والحمامة جارحة \_\_\_\_\_
- ٤ (٢ ∃ ح) ٨ (٢ > ٥) (خ) لأن ٢ ∃ ح صائبة، ٢ > ٥ خاطئة. ∴ ص ٨ خ هو خ
- ٥ (٨ = ٣٢) ٨ لـ ٣ = (٨) \_\_\_\_\_
- ٦ (جتا  $\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}$ ) ٨ (ظا  $\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}$ ) \_\_\_\_\_

## ٢ أداة الربط (أو) (or)

يرمز لأداة الربط (أو) بالرمز (v)

وتكون العبارة الرياضية المركبة التي تربط مركبتها أداة الربط (أو) خاطئة في الحالة الوحيدة التي تكون كل من مركبتها خاطئة، وفيما سوى ذلك تكون صائبة لاحظ الجدول:

| ف | ن | ف v ن |
|---|---|-------|
| ص | ص | ص     |
| ص | خ | ص     |
| خ | ص | خ     |
| خ | خ | خ     |

## نشاط ٣:

أتأمل الشكل المجاور، كيف يمكن الربط بين إمكانية تدفق الماء من مصدره، والوصول للخرزان، مع أداة الربط (أو) وجدول صوابها.

١ أذكر الحالات التي سيتدفق بها الماء من المصدر وصولاً إلى الخزان.

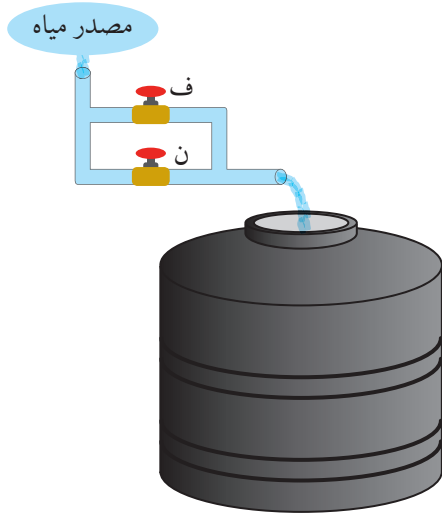
١- المحبسان ف ، ن مفتوحان

٢- \_\_\_\_\_

٣- \_\_\_\_\_

٢ ما الحالة التي لن يصل بها الماء إلى الخزان؟ \_\_\_\_\_

٣ استخدم الرمز ص إذا كان المحبس مفتوحاً، خ إذا كان مغلقاً، ثم أمثل الحالات السابقة في جدول، وأقارنه بجدول الصواب الخاص بأداة الربط (أو).



مثال ٢ :

أوضح قيم صواب العبارات الرياضية المركبة الآتية:

- ١ المثلث مجسم أو الإسطوانة شكل مستوي.
- ٢  $(\{0\} \supset \emptyset)$  أو  $(2 \notin \{23\})$
- ٣ (مجموع قواسم العدد  $18 < 40$ ) أو  $7$  تقسم على  $28$  دون باقٍ.
- ٤ إما المسجد الأقصى أو المسجد الحرام أولى القبلتين.
- ٥ باب الساهرة أحد أبواب الخليل أو الطور أحد جبالها.

ألاحظ الجدول

الحل :

| رقم العبارة | المركبة الأولى ف | المركبة الثانية ن | ف ٧ ن |
|-------------|------------------|-------------------|-------|
| ١           | خ                | خ                 | خ     |
| ٢           | ص                | ص                 | ص     |
| ٣           | خ                | خ                 | خ     |
| ٤           | ص                | خ                 | ص     |
| ٥           | خ                | خ                 | خ     |

- ١ لتكن ف: النيون من العناصر النييلة ، ن: الكبريت فلز  
أعبر عن العبارات الرياضية الرمزية الآتية بالكلمات، وأبين قيمة صواب كل منها:  
 أ ف ٨ ~ ن      ب ~ ف ٨ ~ ن      ج ~ ف ٧ ~ ن
- ٢ أبين قيمة صواب كل من العبارات الرياضية المركبة الآتية:  
 أ يحدث الخسوف للشمس و يحدث الكسوف للقمر  
 ب م (٢ ، ٥) تحقق ص = ٢س + ١ أو ك (-٢ ، -١) تقع في الربع الثالث في المستوى الديكارتي  
 ج  $(\sqrt{2} \in \mathbb{C})$  و  $(\pi \text{ عدد نسبي})$
- ٣ أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:  
 ١ إذا كانت ف عبارة رياضية صائبة ، ن خاطئة ، ما العبارة الرياضية المركبة الصائبة فيما يأتي؟  
 أ ( ف ٨ ~ ن      ب ) ~ ف ٨ ~ ن      ج ) ~ ف ٧ ~ ن      د ( ن ٧ ~ ف  
 ٢ ما العبارة الرياضية الصائبة فيما يأتي؟  
 أ (الألوان الأساسية هي: أحمر، أصفر، أزرق  
 ب) (الألوان الثانوية هي: أحمر، أصفر، أزرق  
 ج) (الألوان الباردة هي: أحمر، أصفر، أزرق  
 د) (الألوان المحايدة هي: أحمر، أصفر، أزرق.  
 ٣ ما العبارة الرياضية التي قيمة صوابها (خ) فيما يأتي؟  
 أ) ابن الهيثم عالم بصريات و أبو قراط أبو الطب.  
 ب) ابن الهيثم ليس عالم بصريات أو أبو قراط أبو الطب.  
 ج) ابن الهيثم عالم بصريات أو أبو قراط ليس أبا الطب.  
 د) ابن الهيثم ليس عالم بصريات و أبو قراط أبو الطب.  
 ٤ ما العبارة الرياضية الصحيحة فيما يأتي؟  
 أ) -٣ عدد غير صحيح  $\sqrt{2} \sqrt{7}$  عدد غير نسبي.  
 ب) -٣ عدد غير صحيح  $\sqrt{2} \sqrt{7}$  عدد نسبي.  
 ج) -٣ عدد غير صحيح  $\sqrt{2} \sqrt{8}$  عدد نسبي.  
 د) -٣ عدد غير صحيح  $\sqrt{2} \sqrt{8}$  عدد غير نسبي.

أولاً: أداة الربط: (إذا كان ... فإن ...) (...If... then)

تسمى أداة الربط (إذا كان... فإن...) أداة الشرط ويرمز لها بالرمز (←)

إليك النص الآتي:

نشاط ١:

«هناك علاقة ثلاثية مميزة بين الفلاح والأرض والمطر، فإذا كان المطر يعيق حركة بعض الناس، فإن الفلاح ينتظر نزوله بفارغ الصبر؛ لتثمر أرضه وتجدد بالحصاد، والخير الوفير. يطل أبو نجيب من شباك بيته، ويراقب المطر الغزير، ويقول لزوجته: إن استمر المطر في الهطول، سيكون موسم خير علينا، وستغل زروعنا، وإذا بعنا منتوجنا من الحبوب فإننا سنكون قادرين على شراء الجرار، وإذا اشتريناه سيعيننا في العمل في الأرض، ويتضاعف إنتاجنا، وعندها سنكون قادرين على تعليم أبنائنا». إذا تأملت النص السابق تجد أنه يزخر بالعبارات الشرطية، وتجد أن كلاً منها يتكون من فعل الشرط وجوابه، تربطهما أداة الربط (إذا كان... فإن...) ويعبر عنها رمزياً (ف ← ن)، وتقرأ (إذا كان ف فإن ن) أو (ف إذن ن)، تسمى مركبتها الأولى ف مقدمة العبارة الرياضية الشرطية، بينما تسمى الثانية تاليها؛ أكمل جدول الصواب لهذه العبارة الرياضية كما يأتي:

| ف ← ن | ن | ف |
|-------|---|---|
| ص     | ص | ص |
| خ     |   | ص |
| ص     |   | خ |
| ص     | خ |   |

ويلاحظ أن العبارة الرياضية الشرطية ف ← ن تكون خاطئة في الحالة الوحيدة، عندما تكون مقدمتها صائبة وتاليها خاطئة.

## مثال ١ :

عامر من أفضل طلبة الصف الذين يبرمجون (الروبوت) في المدرسة الصناعية، قال له مدير المدرسة في بداية العام الدراسي: إذا فزت في المسابقة التي تنظمها وزارة التربية (للروبوتات) فسأقدم لك جائزةً، جهاز حاسوب محمول. متى تكون هذه العبارة الرياضية صائبة، ومتى تكون خاطئة؟

## الحل :

بناءً على جدول صواب العبارة الرياضية الشرطية، وكما هو واضح في الجدول السابق، تكون العبارة الرياضية صائبة في الحالات الآتية :

- ١ عامر فاز في المسابقة وقدم له المدير الجائزة.
- ٢ لم يفز عامر ولكن المدير قدم له الجائزة.
- ٣ لم يفز عامر ولم يقدم له المدير الجائزة.

وتكون هذه العبارة الرياضية خاطئة في الحالة: «أن عامراً فاز بالمسابقة، ولكن المدير لم يقدم له الجائزة».

## نشاط ٢ :

أكتب قيم صواب كل من العبارات الرياضية الآتية في المكان المخصص، وأبين السبب:

- ١ إذا كان وادي الباذان يقع في نابلس فإن سلفيت محافظة الزيتون.  
وادي الباذان في نابلس عبارة صائبة،  
وكذلك سلفيت محافظة الزيتون .: ص ← ص هو ....
- ٢ للمثلث متساوي الساقين محورا تماثل إذن مجموع قياسات زواياه =  $180^\circ$  .
- ٣ (إذا كان الصفر حلاً للمعادلة  $s^2 = s$ ) فإن  $(4 = \frac{1}{2} = 2)$  .
- ٤ الصفر حل للمعادلة  $s^2 = s$  صائبة،  $4 = \frac{1}{2} = 2$  خاطئة (لماذا؟).: ص ← خ هو .
- ٤  $(5 = 1 - 5) \leftarrow (\sqrt{18} \sqrt{2} = \sqrt{36})$  .

## ثانياً: أداة الربط (... إذا فقط إذا...) (If and only if...)

يرمز لهذه الأداة بالرمز ( $\leftrightarrow$ ) وتسمى أداة الشرط الثنائية وتقرأ ف إذا فقط إذا ن

ويرمز لها (ف  $\leftrightarrow$  ن) تعني (ف  $\leftarrow$  ن)  $\wedge$  (ن  $\leftarrow$  ف)

إذا كانت ف: الضرب عملية تبديلية على ح، ن:  $أ \times ب = ب \times أ$ ، أ، ب  $\exists$  ح فإن العبارة الرياضية «الضرب عملية تبديلية إذا فقط إذا كان  $أ \times ب = ب \times أ$ » ويكون جدول صواب هذه الأداة كما يأتي:

| ف | ن | ف $\leftrightarrow$ ن |
|---|---|-----------------------|
| ص | ص | ص                     |
| ص | خ | خ                     |
| خ | ص | خ                     |
| خ | خ | ص                     |

أبين قيم الصواب للعبارات الرياضية الآتية:

مثال ٢:

١ الوسط الحسابي  $\bar{s} = \frac{\sum s}{n}$  إذا فقط إذا  $\sum s = n \times \bar{s}$ .

٢ قطرا المستطيل متعامدان إذا فقط إذا كانت زواياه قوائم.

٣  $٢ + ٣ < ١٠$  إذا فقط إذا كان ٥١ عدداً أولياً.

٤  $\sqrt{٤} = ٢ \pm \leftrightarrow |٤| = ٤$

٥ الحرم الإبراهيمي في الخليل إذا فقط إذا كانت كنيسة المهدي في القدس.

الحل : ١، ٣ صائبان ، ٢، ٤، ٥ خاطئة.

الحل :

## تمارين ومسائل ٣-٢

- ١ لتكن ف : الوتر أطول أضلاع المثلث قائم الزاوية  
ن : مجموع قياسات زوايا الشكل الخماسي الداخلية =  $540^\circ$   
أعبر عما يأتي بالكلمات:
- ١ ف  $\leftarrow$  ن      ٢  $\sim$  ن  $\leftarrow$  ف  $\sim$       ٣  $\sim$  ف  $\leftrightarrow$  ن
- ٢ أبين قيم الصواب لكل مما يأتي:
- ١ إذا كان الصفر عدداً فردياً فإن الواحد عدد أولي.  
٢ إذا كان ١٠٠ أحد قوى العشرة فيما  $3 < 2$  أو  $3 = [1, 3]$   
٣ إذا كان ٥ من عوامل العدد ٢٠ فإنه  $(20 = 4 \times 5)$  و  $(4 = 5 \div 20)$   
٤  $2 + 5 = 3$  و  $8$  عدد زوجي إذن  $30 = 6 \times 5$
- ٣ إذا كانت م: محمود درويش شاعر، ن: ناجي العلي رسام كاريكاتير، ع: عارف العارف مؤرخ  
أعبر بالرموز عن العبارات الرياضية الآتية:
- ١ إذا كان محمود درويش شاعراً فإن ناجي العلي رسام كاريكاتير.  
٢ ناجي العلي رسام كاريكاتير إذا وفقط إذا كان عارف العارف مؤرخاً.  
٣ إذا كان محمود درويش شاعراً وعارف العارف مؤرخاً فإن ناجي العلي رسام كاريكاتير.  
٤ إما عارف العارف مؤرخ أو محمود درويش شاعر إذن ناجي العلي رسام كاريكاتير.
- ٤ أعبر عما يأتي بأمثلة من كلماتي:
- ١ ف  $\leftarrow$  (ن ٧ م)      ٢  $\sim$  ف ٧ (ن ٨ م)      ٣ (ن ٨ م)  $\leftrightarrow$  ف
- ٥ أصمم جدول الصواب لكل من العبارات الرياضية الآتية:
- ١ (ف  $\leftarrow$  ن) ٨  $\sim$  ف      ٢ (ف ٧ ن)  $\leftarrow$  (ف ٨ ن)      ٣  $\sim$  (ف  $\leftarrow$  ن) ٨  $\sim$  م
- ٦ أملأ الجدول الآتي بما يناسب:

|   | ف ٨ $\sim$ ن |   |   | ن | ف |
|---|--------------|---|---|---|---|
| ص | خ            | ص | خ | ص | ص |
| ص |              | ص | ص | خ | ص |
| ص | خ            | ص | خ | ص | خ |
| خ |              | خ | ص | خ | خ |



أولاً: إثبات تكافؤ عبارتين رياضيتين مركبتين باستخدام جداول الصواب:

من الاستخدامات المهمة لجداول الصواب، هو استخدامها في إثبات تكافؤ عبارتين رياضيتين، ويتم ذلك بكتابة قيم الصواب الممكنة لكل من العبارتين، وملاحظة القيم المتناظرة لهما:

أ تأمل جدول الصواب للعبارتين:  $\sim (ف٨ ن)$  ،  $\sim ف٧ ن$

مثال ١ :

| ف | ن | ف٨ ن | $\sim (ف٨ ن)$ | $\sim ف٧ ن$ | ن | $\sim ف٧ ن$ |
|---|---|------|---------------|-------------|---|-------------|
| ص | ص | ص    | خ             | خ           | خ | خ           |
| ص | خ | خ    | ص             | ص           | ص | ص           |
| خ | ص | خ    | ص             | ص           | خ | ص           |
| خ | خ | خ    | ص             | ص           | ص | ص           |

ألاحظ أن قيم صواب العبارتين المتناظرة في الجدول هي ذاتها، فأقول: إن العبارتين متكافئتان، وأكتب ذلك بالرموز  $\sim (ف٨ ن) \equiv \sim ف٧ ن$  ، والتكافؤ السابق يوضح لنا كيف ننفي العبارة المركبة  $(ف٨ ن)$  ، حيث يتم ذلك بنفي مركبتها، وتحويل أداة الربط ٨ إلى ٧ ، فعند قولنا ليس صحيحاً أن «القول من البقوليات والزعتر نبات طبي» فإن ذلك يعني: إما أن القول ليس من البقوليات أو أن الزعتر ليس نباتاً طبيّاً.

تعريف: تكون العبارتان الرياضيتان المركبتان متكافئتين، إذا كان لهما نفس قيم الصواب المتناظرة في جدول صوابهما.

أبين تكافؤ أو عدم تكافؤ العبارتين  $\sim ف٧ ن$  ،  $\sim ف٨ ن$  باستخدام جدول الصواب

مثال ٢ :

| ف | ن | ن | $\sim ن$ | ف٧ ن | $\sim ف٧ ن$ | $\sim ف٨ ن$ |
|---|---|---|----------|------|-------------|-------------|
| ص | ص | ص | خ        | ص    | ص           | خ           |
| ص | خ | خ | ص        | ص    | ص           | خ           |
| خ | ص | ص | خ        | خ    | ص           | ص           |
| خ | خ | خ | ص        | ص    | ص           | خ           |

الحل :

ألاحظ أن قيم الصواب المتناظرة للعبارتين ليست نفسها، لذا  $\sim ف٧ ن$  لا تكافئ  $\sim ف٨ ن$

## نشاط ١:

إليك العبارتين التاليتين:

ف: الوطن عزيز، ن: الحرية غالية

- أعبر عن ف ← ن ، ن ← ف بالكلمات

- أملأ الفراغات اللازمة في جدول الصواب الآتي:

| ف | ن | ف ← ن | ن ← ف | ف ~ ن | ن ~ ف |
|---|---|-------|-------|-------|-------|
| ص | ص | ص     |       |       |       |
| ص | خ | خ     |       |       |       |
| خ | ص | ص     |       |       |       |
| خ | خ | ص     |       |       |       |

ماذا ألاحظ على قيم الصواب المتناظرة للعبارتين ف ← ن ، ن ← ف ~ ف ؟

ألاحظ أن ف ← ن ≡ ن ← ف وهذا يوصلني إلى التعريف الآتي:

تعريف: المعاكس الإيجابي للعبارة الرياضية ف ← ن هو ن ← ف

## مثال ٣:

أكتب المعاكس الإيجابي لكل مما يأتي:

- ١ إذا ساد العدل أمن المجتمع.
- ٢ إذا كان العدد ١٧ أولياً فإن مجموعة قواسمه ليست ثنائية.
- ٢ (س - ٢) من عوامل س<sup>٣</sup> - ٨ ، إذن س<sup>٣</sup> - ٨ = (س - ٢) (س<sup>٢</sup> + ٤)

## الحل :

- ١ إذا لم يأمن المجتمع لم يسد العدل.
- ٢ إذا كانت مجموعة قواسم العدد ١٧ ثنائية فإنه ليس أولياً.
- ٣ إذا كان س<sup>٣</sup> - ٨ ≠ (س - ٢) (س<sup>٢</sup> + ٤) فإن (س - ٢) من ليس من عوامل س<sup>٣</sup> - ٨

مثال ٤ : أثبت أن العبارتين  $f \leftarrow n$  ،  $\sim f \vee n$  متكافئتان.

الحل : بتكوين جدول الصواب المناسب، وملاحظة قيم الصواب المتناظرة للعبارتين السابقتين:

| ف | ن | ف ← ن | ~ ف | ~ ف ∨ ن |
|---|---|-------|-----|---------|
| ص | ص | ص     | خ   | ص       |
| ص | خ | خ     | خ   | ص       |
| خ | ص | ص     | ص   | ص       |
| خ | خ | ص     | ص   | ص       |

بما أن قيم الصواب المتناظرة للعبارتين:  $f \leftarrow n$  ،  $\sim f \vee n$

∴  $f \leftarrow n \equiv \sim f \vee n$

ومن التكافؤ السابق أتوصل إلى أن: نفي العبارة الرياضية الشرطية إذا كان فإن هو ف وليس ن أي تثبيت مقدمتها ونفي تاليها.

## ثانياً: إثبات تكافؤ العبارات الرياضية دون استخدام جداول الصواب

تعلمنا في الدرس السابق كيفية إثبات تكافؤ عبارتين، باستخدام جدول الصواب الخاص بهما، حيث توصلنا إلى أنه إذا تشابهت قيم الصواب المتناظرة لعبارتين رياضيتين، فإنهما متكافئان، والسؤال الآن: هل هذه هي الطريقة الوحيدة التي تمكننا من إثبات ذلك؟ والإجابة طبعاً لا، حيث نستطيع إثبات ذلك باستخدام مجموعة من الخصائص، أو من العبارات التي تم إثبات تكافؤها عن طريق الجدول وسواه.

وإليك خواص العمليات  $\sim$ ،  $\wedge$ ،  $\vee$  وهي تعبر عن أزواج من العبارات الرياضية المتكافئة، وتساعد في إثبات تكافؤ عبارات رياضية دون اللجوء إلى جدول الصواب:

- ١  $\sim(\sim f) \equiv f$  نفي النفي (النفي المتكرر)
- ٢  $\sim(f \wedge n) \equiv \sim f \vee \sim n$  ،  $\sim(f \vee n) \equiv \sim f \wedge \sim n$  قانون دي مورغان
- ٣  $(f \vee n) \equiv (n \vee f)$  ،  $(f \wedge n) \equiv (n \wedge f)$  خاصية التبديل
- ٤  $(f \wedge (n \wedge m)) \equiv f \wedge (n \wedge m)$  ،  $(f \vee (n \vee m)) \equiv f \vee (n \vee m)$  خاصية التجميع
- ٥  $f \wedge (n \vee m) \equiv (f \wedge n) \vee (f \wedge m)$  ،  $f \vee (n \wedge m) \equiv (f \vee n) \wedge (f \vee m)$  خاصية التوزيع

نشاط بيتي: أبين صحة القوانين السابقة باستخدام جداول الصواب.

مثال ١: أثبت أن  $\sim (ف \leftarrow ن) \equiv ف \wedge \sim ن$  دون استخدام جداول الصواب.

الحل: نعلم أن  $ف \leftarrow ن \equiv \sim ن \vee ف$   
 $\sim (\sim ن \vee ف) \equiv (\sim \sim ن) \wedge \sim ف$   
 $\equiv ن \wedge \sim ف$  لماذا؟  
 $\equiv ف \wedge \sim ن$  لماذا؟

ونستنتج من هذا التكافؤ كيفية نفي العبارة الشرطية  $ف \leftarrow ن$

نفي العبارة الرياضية الشرطية إذا كان  $ف$  فإن  $ن$ : هو  $ف$  و ليس  $ن$  أي بتثبيت مقدمتها ونفي تاليها.

مثال ٢: أنفي ما يأتي:

- ١ إذا كان  $ق$  (س) اقتراناً زوجياً فإن منحناه متماثل حول نقطة الأصل.
- ٢ هـ س اقتران متزايد إذن  $(هـ^٣ < هـ^٢)$ .

الحل: ١  $ق$  (س) اقتران زوجي ومنحناه غير متماثل حول نقطة الأصل..  
٢ هـ س اقتران متزايد و  $(هـ^٣ \geq هـ^٢)$ .

مثال ٣: أثبت أن (ف ∨ ن) ← ن ≡ ف ← ن

الحل : (ف ∨ ن) ← ن ≡ ~ (ف ∨ ن) ∨ ن لماذا؟  
(ف ∨ ن) ← ن ≡ (~ف ∨ ~ن) ∨ ن لماذا؟  
(ف ∨ ن) ← ن ≡ (~ف ∨ ن) ∨ ن لماذا؟  
(ف ∨ ن) ← ن ≡ (~ف ∨ ن) ∨ ن لماذا؟  
(ف ∨ ن) ← ن ≡ (~ف ∨ ن) ∨ ن لماذا؟  
(ف ∨ ن) ← ن ≡ (~ف ∨ ن) ∨ ن لماذا؟

## تمارين ومسائل ٢-٤

١ أبين تكافؤ أو عدم تكافؤ العبارات الرياضية الآتية باستخدام جداول الصواب:

١ ف ← ن ، ~ف ∨ ن

٢ (ف ∨ ن) ← ~ف ، ~ف ∨ ن

٢ أكتب المعاكس الإيجابي للعبارات الرياضية الآتية:

١ (∃ ط) ← (∃ √٧ ص)

٢ إذا كان التدخين مضرًا بالصحة أو الفواكه مفيدة فإن السمك عالي القيمة الغذائية.

٣ أنفي العبارات الرياضية الآتية:

١ إذا كان المثلث متساوي الأضلاع فإنه حاد الزوايا.

٢ المنطق من فروع الرياضيات إذن الرياضيات لغة العلوم.

٤ أثبت تكافؤ ما يأتي دون استخدام جداول الصواب:

١ أثبت أن ~ (ف ← ن) ≡ ف ∨ ن

٢ ف ← (ف ∨ ن) ≡ (ف ∨ ن) ← ف

٣ (~ف ∨ ن) ← (ف ∨ ن) ≡ (~ف ∨ ن) ← (ف ∨ ن)

٤ ف ← (ن ∨ م) ≡ (ف ← ن) ∨ (ف ← م)

نشاط ١:

في تلك القرية الهادئة المفعمة بالسلام، الحالم أهلها بلقمة العيش، الواقعة على أطراف القدس وفي صباح ذلك اليوم الربيعي، حيث كان الناس نياماً، تدخل عصابات العنف والبطش والمكر للقرية، تقتل ما يقارب ثلاثمائة آمن، وتشرّد أهلها لتفرغ الأرض من ساكنيها، وتستولي على أراضيهم.

عن أي قرية يتحدث النص السابق؟

في معرض حديثنا عن العبارات، رأينا أن بعض الجمل ليست عبارات رياضية، لأننا لا نستطيع الحكم على صحتها، مثل جمل الاستفهام والتعجب وغيرها، ومن الجمل التي لا نستطيع الحكم على صحتها كذلك، جمل تحوي متغيرات مثل:  $٢س = ٨$  التي تحوي المتغير  $س$  وتتحول إلى عبارة رياضية عند إعطاء متغيرها قيمة. ومثل هذه الجمل ليست بالغيرية عليك، فقد تعرفت عليها في بداية عهدك بالدراسة، عندما كان يطلب منك ملء فراغ ما أو مربع ما، لتصبح الجملة صحيحة، ومثال ذلك:

\_\_\_\_\_ أحد فصول السنة أو  $٣ + \square = ٨$  دون تسميتها جملاً مفتوحة.

تعريف:

- الجملة المفتوحة: هي جملة تحوي متغيراً أو أكثر، وتتحول إلى عبارة رياضية عند إعطاء قيم للمتغيرات
- مجموعة التعويض: هي مجموعة قيم المتغير التي يسمح لنا تعويضها مكانه في الجملة المفتوحة.
- مجموعة الحل: هي مجموعة قيم المتغير التي تجعل الجملة المفتوحة عبارةً رياضيةً صحيحةً، وهي مجموعة جزئية من مجموعة التعويض.

ويرمز للجملة المفتوحة: ل(س)، م(س)، ق(س) \_\_\_\_\_ إذا كانت بمتغير واحد و بـك(س،ص)، هـ(س،ص) \_\_\_\_\_ إذا كانت بمتغيرين.

**مثال ١ :** إذا كانت الجملة المفتوحة ق(س):  $٢س < ٥$ ، مجموعة التعويض ح، أجد قيم الصواب لكل من: ق(٢)، ق(٣)، ق( $\sqrt{٥}$ )

**الحل :**  
 ق(٢):  $٢ < ٢ \times ٢$  خاطئة.  
 ق(٣):  $٥ < ٣ \times ٢$  صائبة.  
 ق( $\sqrt{٥}$ ):  $٥ < \sqrt{٥} \times ٢$  خاطئة لماذا؟

**نشاط ٢:** أجد مجموعة حل الجملة المفتوحة ل(س):  $س^٢ = ٤$ ، مجموعة التعويض = ص

**الحل :**  
 $س^٢ = ٤$   
 ومنها  $\sqrt{س^٢} = \sqrt{٤}$   
 $٢ = |س|$   
 $س = \underline{\hspace{2cm}}$  ،  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

**مثال ٢ :** أجد مجموعة الحل للجملة المفتوحة  
 هـ(س، ص):  $س^٢ + ص^٢ = ١$ ، (س، ص)  $\exists$  ص  $\times$  ص  
**الحل :** مجموعة الحل =  $\{(١، ٠)، (٠، ١)، (٠، -١)، (-١، ٠)\}$

**نشاط ٣:** ليكن ف:  $٩ = ٣^٢$ ، ل(س):  $س > ٥$ ، م(س): س عدد أولي.  
 ولتكن مجموعة التعويض ص أجد قيم الصواب للعبارات الآتية:  
 ١ ف ٨ ل(٢)      ٢ ل(٥)  $\leftarrow$  م(٥)      ٣  $\sim$  ل(٣)  $\leftrightarrow$  م(١٠)

**الحل :**  
 ١ ف صائبة، ل(٢) كذلك صائبة،  $\therefore$  ف ٨ ل(٢) صائبة.  
 ٢ \_\_\_\_\_  
 ٣ \_\_\_\_\_

تعريف: تكون الجملتان المفتوحتان متكافئتين إذا كان لهما نفس مجموعة الحل.

مثال ٣: إذا كانت  $Q$  (س):  $2 = s$  ،  $4 = s$  ،  $s = 2$  ،  $s = 6$  ، مجموعة التعويض هي  $V$  .  
أوضح فيما إذا كانت  $Q$  (س) ،  $s = 2$  متكافئتين أم لا.

الحل: مجموعة حل  $Q$  (س) =  $\{2\}$  ، مجموعة حل  $s = 2$  (س) =  $\{2, 3\}$  لماذا؟  
ألاحظ أن مجموعتي الحل غير متساويتين.  
إذن الجملتان  $Q$  (س) ،  $s = 2$  غير متكافئتين.

### تمارين و مسائل ٢-٥

١ لتكن  $L$  (س):  $1 \leq s < 3$  ،  $s > 2$  ،  $s > 4$  ،  $s \in C$

أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ ما العبارة الرياضية الخاطئة فيما يأتي؟

- (أ)  $L(2) \cup V(3)$  (ب)  $L(1) \cap V(3)$   
(ج)  $L(2) \leftrightarrow V(3)$  (د)  $V(0) \cap V(4)$

٢ ما العبارة الرياضية التي تكافئ  $L$  (س) فيما يأتي؟

- (أ)  $s \in [1, 3]$  (ب)  $s \in [1, 3]$   
(ج)  $s \in [1, 3]$  (د)  $s \in [1, 3]$

٣ ما مجموعة حل  $L(3) \cap V(4)$  (س)؟

- (أ)  $1 \leq s < 4$  (ب)  $1 \leq s \leq 4$   
(ج)  $3 \leq s < 4$  (د)  $2 \leq s \leq 3$

٤ ما قيم  $s$  التي تجعل  $L(8) \cap V(8)$  صائبة؟

- (أ)  $1 < s < 3$  (ب)  $2 < s < 3$   
(ج)  $3 < s < 4$  (د)  $2 \leq s \leq 3$



٢ أجد مجموعة حل كل من الجمل المفتوحة الآتية بالنسبة لمجموعة التعويض الموضحة بجانب كل منها:

- ١ ق (س):  $س^2 = س$  ،  $س \in ص$
- ٢ م (س):  $س^3 - 1 = 0$  ،  $س \in \{1, 0, -1\}$
- ٣ ل (س):  $س = \sqrt{س^2}$  ،  $س \in ص$
- ٤ هـ (س):  $س^2 - 11س = -30$  ،  $س \in ط$
- ٥ ع (س):  $س^2 - 1 = (س-1)(س+1)$  ،  $س \in ص$
- ٦ ك (س، ص):  $س ص = 8$  ، (س ، ص)  $\in ص \times ص$
- ٧ ب (س): جاس = جاس ،  $س \in ]\pi, 0[$

٣ ليكن ق (س):  $س - 2 \geq 2$  ، هـ (س):  $س^2 + 1 = 7$  ، مجموعة التعويض ط\*

- ١ أكتب مجموعة حل كل من ق (س) ، هـ (س).
- ٢ أكتب مجموعة حل ق (س)  $\vee$  هـ (س).
- ٣ أكتب مجموعة حل ق (س)  $\wedge$  هـ (س).
- ٤ هل ق (س) ، هـ (س) متكافئتان؟ أوضح ذلك.

٤ إذا كانت ل (س):  $[س] = 3$  ، ع (س):  $|س| = 5$  ، وكانت مجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد

النسبية، أبين قيم الصواب لما يأتي:

- ١ ع  $(-5) \leftarrow ل (2, 5)$
- ٢ ل  $(-3) \leftarrow ع (5)$
- ٣ ل  $(2, 5) \vee ع (3, 5)$
- ٤ ع  $(0) \leftarrow ل (3, 9) \wedge ع (5, 5)$

أولاً: العبارات الرياضية المسورة كلياً

نشاط ١: جاء في بعض مواد الإعلان العالمي لحقوق الإنسان، الذي تبنته الجمعية العامة للأمم المتحدة عام ١٩٤٨ بباريس «يولد جميع الناس أحراراً، متساوين في الكرامة والحقوق. وقد وهبوا عقلاً وضميراً وعليهم أن يعامل بعضهم بعضاً بروح الإخاء، وكذلك لكل فرد الحق في الحياة والحرية والسلامة الشخصية، ولا يجوز القبض على أي إنسان، أو حجزه، أو نفيه تعسفاً».

١ هل أنت مع هذا الإعلان العالمي لحقوق الإنسان؟ ولماذا؟

٢ ما الكلمات الواردة في النص وتعني كلمة جميع.

٣ ماذا يمكن أن تسمى العبارات التي تحوي مثل هذه الكلمات؟

لعلك تلاحظ وجود الكلمات كل، وجميع، وأي، في هذه المواد، وكلها كلمات تعبر عما يسمى بالسور الكلي، ويرمز للسور الكلي بالرمز  $\forall$ .

تعريف: إذا كانت  $Q(x)$  جملة مفتوحة فإن العبارة الرياضية لكل  $x$ ،  $Q(x)$  تسمى عبارة رياضية مسورة كلياً وتكتب  $\forall x, Q(x)$ .

لتكن العبارة الرياضية  $Q(x)$ : الأم حنون، يمكن كتابة العبارة الرياضية «جميع الأمهات حنونات» رمزياً بالصورة  $\forall x, Q(x)$ .

وتكون العبارة الرياضية  $\forall x, Q(x)$  صائبة إذا كانت مجموعة حلها مساوية لمجموعة تعويضها، أي أنها تكون صائبة، إذا كان كل تعويض للمتغير من مجموعة التعويض يجعلها صائبة.

مثال ١ :

أجد قيمة صواب العبارة الرياضية المسورة الآتية:  
 $\forall s, (s + 1)^2 = s^2 + 2s + 1, \exists s \text{ ح.}$

الحل :

العبارة الرياضية صحيحة عند أي تعويض  $s$  من مجموعة التعويض، إذن العبارة المسورة صائبة.

وتكون العبارة المسورة  $\forall s, (s + 1)^2 = s^2 + 2s + 1$  خاطئة، إذا كانت مجموعة حلها لا تساوي مجموعة التعويض، أي أنه إذا وجد تعويض واحد على الأقل من مجموعة التعويض يجعلها خاطئة.

مثال ٢ :

ما قيمة صواب العبارة المسورة  $\forall s, s < 2$  صفر،  $\exists s$  ص؟

الحل :

التعويض  $s = 0$  يجعل العبارة الرياضية خاطئة، إذن العبارة المسورة خاطئة.

نشاط ٢ :

أبين قيم الصواب للعبارات الآتية:

- ١ جميع المثلثات قائمة الزاوية.
- ٢ ألاحظ أن هذه العبارة المسورة خاطئة، لعلنا بوجود كثير من المثلثات غير القائمة، كالمثلث منفرج الزاوية على سبيل المثال لا الحصر ...
- ٣ كل عدد يقبل القسمة على ١٠ يقبل القسمة على ٥.
- ٤ هذه عبارة صحيحة، أفكر في إثباتها بشكل عام .
- ٥ جميع أعمار طلبة الصف الحادي عشر تزيد عن ١٤ عاماً.
- ٦  $\forall s \exists \text{ ح, } s < 2$
- ٧  $\forall s \exists \text{ ح, } s^2 = (s - 1)(s + 1) + 1$

## ثانياً: العبارات الرياضية المسورة جزئياً

في تجربة رذرفورد، تم تسليط أشعة من جسيمات ألفا على رقيقة ذهب، فوجد أن بعض الأشعة ينعكس وبعضها الآخر ينكسر، ومعظمها ينفذ، ويدل ذلك على أنه يوجد بعض مساحات فارغة في الذرة، وأيضاً يوجد جسيمات لها نفس شحنة الأشعة، وهناك جسيمات لها شحنة مختلفة عن شحنة الأشعة. لعلك لاحظت وجود الكلمات بعض، ومعظم، ويوجد، في النص السابق، وهي كلمات تعبر عما يسمى بالسور الجزئي، ويرمز للسور الجزئي بالرمز E. ويمكن كتابة العبارة الرياضية «بعض الأعداد الحقيقية سالبة» بالصورة هـ(س): س عدد حقيقي سالب.

تعريف: إذا كانت ق(س) جملةً مفتوحةً فإن العبارة الرياضية يوجد س : هـ(س) تسمى عبارةً رياضيةً مسورةً جزئياً وتكتب E س: هـ(س)

وتكون هذه العبارة الرياضية صائبةً، إذا وجد تعويض واحد على الأقل من مجموعة التعويض، يجعلها صائبةً، وتكون خاطئةً، إذا كان كل تعويض من مجموعة التعويض يجعلها خاطئةً، أي أن مجموعة حلها =  $\emptyset$

ما قيمة صواب كل من العبارات الرياضية المسورة الآتية:

مثال ٣:

- ١ بعض الأعداد الطبيعية تقسم على ٥.
- ٢ E : ع = ٣ع - ٨ ، ع ∃ ط
- ٣ E : ص = ٥ = ٤ ، ص ∃ ح
- ٤ ٧ س ، (٢س = ٢س) ٧ (٢س عدد زوجي) ، س ∃ ح

١ صائبة.

٢ خاطئة.

٣ صائبة.

٤ خاطئة.

الحل :

- ١ أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:
- ١ ما العبارة المسورة الصائبة فيما يأتي؟
- أ)  $E$  :  $s = 2$  ،  $s \in \mathbb{R}$  - ب)  $\forall s, s^3 = s$  ،  $s \in \mathbb{R}$  \*
- ج)  $E$  :  $s = 2$  ،  $s \in \mathbb{N}$  د)  $E$  :  $k = 2 - k$  ،  $k \in \mathbb{R}$  \*
- ٢ ما العبارة المسورة الخاطئة فيما يأتي، إذا كانت مجموعة التعويض = ح؟
- أ)  $E$  :  $s = [3, 5]$  ب)  $E$  :  $s = |s|$  ،  $s = 8$
- ج)  $E$  :  $s = \frac{s}{1 + s^2} < 0$  د)  $E$  :  $s = \sqrt{s + 1} = 9$
- ٣ أحدد العبارة المسورة الصائبة فيما يأتي؟
- أ)  $\forall s, s \in \mathbb{R} \rightarrow s^2 \in \mathbb{R}^+$  ب)  $\forall s, s \in \mathbb{R} \rightarrow s + 1 \in \mathbb{R}$  \*
- ج)  $\forall s, s \in \mathbb{R} \rightarrow \sqrt{s} \in \mathbb{R}$  د)  $\forall s, s \in \mathbb{R} \rightarrow \sqrt{s} \in \mathbb{R}$
- ٢ ما قيم صواب العبارات المسورة الآتية؟
- ١ بعض الطلبة موهوبون.
- ٢ كل الأشجار مثمرة.
- ٣ يوجد عدد حقيقي لا ينتمي جذره التربيعي إلى  $\mathbb{R}$ .
- ٤ كل زوايا المثلث حادة.
- ٣ أبين صواب أو خطأ كل من العبارات المسورة الآتية، مع ذكر السبب حيث مجموعة التعويض هي ح
- ١  $E$  :  $s = 2$  ،  $s = 2$
- ٢  $\forall s, s < 0 \rightarrow s^2 < 0$  ،  $s \in \mathbb{R}$
- ٣  $\forall s, s \in \mathbb{R} \rightarrow s > s$  ،  $E$  :  $s > s$
- ٤  $E$  :  $s, s \in \mathbb{R} : (s + 2 = 6) \wedge (s + 1 = \frac{1}{2})$

نشاط ١:

ضمن الفعاليات المساندة لمعركة الأمعاء الخاوية للأسرى في إضرابهم عن الطعام لنيل حقوقهم الإنسانية المشروعة، كانت كل المحلات التجارية مغلقة:

١ ما نوع العبارة: كل المحلات التجارية مغلقة؟

٢ نفي كل المحلات التجارية هو \_\_\_\_\_ .

٣ نفي مغلقة هو \_\_\_\_\_ .

٤ نفي كل المحلات التجارية مغلقة هو بعض المحلات التجارية غير مغلقة.

وعليه إذا أردت أن تنفي العبارة الرياضية المسورة: جميع الطلبة متفوقون، فإن نفيها هو « بعض الطلبة غير متفوقين » وهذا يعني أنه عند نفي العبارة الرياضية المسورة كلياً، فإننا نستبدل السور الكلي  $\forall$  بالسور الجزئي  $\exists$  وننفي الجملة المفتوحة.

تعريف:  $\sim (\forall s, q(s))$  هو  $(\exists s : \sim q(s))$

أما إذا أردت نفي العبارة « بعض أجهزة الحاسوب معطلة » فإن نفيها هو: كل أجهزة الحاسوب غير معطلة» أي أنه عند نفي العبارة الرياضية المسورة جزئياً، فإننا نستبدل السور الجزئي  $\exists$  بالسور الكلي  $\forall$  وننفي الجملة المفتوحة.

تعريف:  $\sim (\exists s, q(s))$  هو  $(\forall s, \sim q(s))$

مثال ١:

أنفي العبارات المسورة الآتية:

١ كل الأعداد الطبيعية هي أعداد حقيقية.

٢ بعض الأعداد الحقيقية نسبية.

٣  $\forall s, \exists s \leftarrow \exists s$

٤  $\exists s : q(s)$  اقتران زوجي وفردى.

- الحل :
- ١ بعض الأعداد الطبيعية ليست حقيقية.
  - ٢ كل الأعداد الحقيقية غير نسبية.
  - ٣  $E$  س : س  $\exists$  ص  $\wedge$  ن
  - ٤  $\forall$  س ، ق (س) اقتران ليس زوجياً أو ليس فردياً.

## تمارين ومسائل ٧-٢

- ١ أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:
  - ١ ما نفي العبارة الرياضية «بعض الحيوانات غير مفترسة»؟
    - أ) كل الحيوانات غير مفترسة.
    - ب) بعض الحيوانات غير مفترسة.
    - ج) كل الحيوانات مفترسة.
    - د) بعض الحيوانات مفترسة.
  - ٢ أي العبارات الرياضية الآتية تكافئ نفي العبارة الرياضية «بعض مصادر المعلومات موسوعات».
    - أ) جميع مصادر المعلومات موسوعات.
    - ب) كل مصادر المعلومات ليست موسوعات.
    - ج) يوجد مصادر معلومات ليست موسوعات.
    - د) بعض مصادر المعلومات موسوعات.
  - ٢ ما قيم صواب العبارات المسورة الآتية؟:
    - ١  $E$  س  $\exists$  ص :  $2 \geq$  س  $> 5$
    - ٢  $\forall$  س  $\exists$  [٥، ٠] ، س  $^2 < 1$
    - ٣  $E$  س  $\exists$  ص : س  $\leq 0$   $\wedge$  س  $> 1$
  - ٣ أنفي العبارات المسورة الآتية:
    - ١ كل المربعات معينات.
    - ٢ بعض الاقترانات دائرية.
    - ٣  $E$  (س ، ص)  $\exists$  ط  $\times$  ط : س  $\geq$  ص

## نشاط ١:

نحتاج في حياتنا اليومية في كثير من الأحيان، إثبات صحة فرضية ما، فمثلاً: إذا أراد أبو سعيد الذي يمتلك مصنعاً للجلود اختبار الفرضية «كلما زاد عدد العمال، زاد ربح المصنع» فهو بحاجة لاختبار صحة أو خطأ هذه الفرضية، وللوصول إلى النتيجة، يجب التسلسل بخطوات منطقية ومقنعة ومبنية على الحجج والبراهين، للاقتناع بصحة أو خطأ هذه الفرضية.

كيف يمكن التحقق من صحة هذه الفرضية؟

في هذا الدرس سنتطرق لبعض طرق البرهان لإثبات صحة عبارة رياضية شرطية، تكتب على الصورة:  $f \leftarrow n$ .

لنتذكر أن العبارة الشرطية  $f \leftarrow n$ ، تكون صائبة عندما: (ف صائبة، ن صائبة)، (ف خاطئة، ن صائبة)، (ف خاطئة، ن خاطئة)، لذلك لإثبات صحة هذه العبارة الشرطية، سنستخدم عدة طرق: البرهان المباشر، والبرهان غير المباشر، والبرهان بالتناقض، والبرهان بالاستقراء الرياضي.

## أولاً: البرهان المباشر

في هذه الطريقة، نفرض أن العبارة  $f$  صائبة، ومن خلال خطوات منطقية مبررة نصل إلى أن  $n$  صائبة، وبهذا تكون العبارة:  $f \leftarrow n$  صائبة.

## مثال ١:

إذا كانت  $A$ ،  $B$ ،  $C$  ثلاثة أعداد صحيحة موجبة، وكان  $A$  أحد عوامل  $B$ ،  $B$  أحد عوامل  $C$ ، فثبت أن  $A$  أحد عوامل  $C$ .

## الحل:

نفرض  $f$ :  $A$  أحد عوامل  $B$  و  $B$  أحد عوامل  $C$ ،  $n$ :  $A$  أحد عوامل  $C$ .  
المطلوب إثبات صحة:  $f \leftarrow n$ .

$A$  أحد عوامل  $B$ ، إذن  $B = Ak$ ، حيث  $k$  عدد صحيح..... لماذا؟

$B$  أحد عوامل  $C$ ، إذن  $C = Bl$ ، حيث  $l$  عدد صحيح..... لماذا؟

بتعويض قيمة  $B$  نجد أن  $C = Ak \cdot l$ ، لكن  $k \cdot l$  عدد صحيح نفرضه  $m$ .... لماذا؟

$C = Am$  إذن  $A$  أحد عوامل  $C$ .



مثال ٢ :

إذا كان أ عدداً فردياً و ب عدداً زوجياً، فإن  $أب =$  عدد زوجي.

الحل :

نفرض ف : أعداد فردي ،  $\therefore أ = ٢ك + ١$  حيث  $ك \in \mathbb{V}$ .

ن : ب عدد زوجي ،  $\therefore ب = ٢ل$  حيث  $ل \in \mathbb{V}$ .

المطلوب إثبات صحة : ف  $\leftarrow$  ن .

$$أ \times ب = (٢ك + ١)(٢ل) = ٤كل + ٢ل = ٢(٢كل + ل)$$

لكن  $٢ك ل =$  عدد صحيح ونفرض أنه م..... لماذا؟

$$\therefore أ \times ب = ٢(٢كل + ل) = ٢(٢م + ل) ، حيث و  $\in \mathbb{V}$  ..... لماذا؟$$

$\therefore$  أب عدد زوجي.

مثال ٣ :

إذا كانت أ ، ب ، ج ثلاثة أعداد حقيقية، أثبت أن :  $أ^٢ + ب^٢ + ج^٢ \leq أب + أ ج + ب ج$ .

الحل :

نفرض ف : أ ، ب ، ج أعداد حقيقية.

$$ن : أ^٢ + ب^٢ + ج^٢ \leq أب + أ ج + ب ج .$$

المطلوب إثبات صحة : ف  $\leftarrow$  ن .

تذكر أن  $س^٢ \leq ٠$  ..... لماذا؟

$$إذن (أ - ب)^٢ + (أ - ج)^٢ + (ب - ج)^٢ \leq ٠ \dots \dots \dots \text{لماذا؟}$$

$$أ^٢ - ٢أب + ب^٢ + أ^٢ - ٢أج + ج^٢ + ب^٢ - ٢بج + ج^٢ \leq ٠$$

$$(٢أ^٢ + ٢ب^٢ + ٢ج^٢) - (٢أب + ٢أج + ٢بج) \leq ٠ \text{ بالقسمة على } ٢$$

$$(أ^٢ + ب^٢ + ج^٢) - (أب + أ ج + ب ج) \leq ٠$$

$$\therefore (أ^٢ + ب^٢ + ج^٢) \leq (أب + أ ج + ب ج)$$

## ثانياً: البرهان غير المباشر

لقد عرفت سابقاً أن العبارة  $F \leftarrow N \equiv M \leftarrow F$ ، لذلك إذا تحققت صحة  $M \leftarrow F$  تتحقق ضمناً صحة  $F \leftarrow N$ . لذلك نفرض صحة  $M \leftarrow F$  ونثبت صحة  $F \leftarrow N$ . تسمى هذه الطريقة بالبرهان غير المباشر.

**مثال ٤ :** أستخدم البرهان غير المباشر لإثبات أن «إذا كان المثلث متساوي الأضلاع، فإن جميع قياسات زواياه متساوية».

**الحل :** المعطيات:  $F$ :  $AB = BC = CA$  مثلث متساوي الأضلاع.

$N$ :  $\angle A = \angle B = \angle C$ .

البرهان: باستخدام البرهان غير المباشر لإثبات أن:

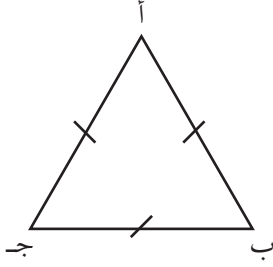
صحة  $F \leftarrow N$ ، نثبت أن  $M \leftarrow F$  صحيحة.

نفرض  $M$ :  $AB = BC = CA$  مثلث متساوي الأضلاع غير متساوية صائبة.

المطلوب إثبات أن  $F$ :  $AB = BC = CA$  مثلث أضلاعه غير متساوية.

نفرض أن  $\angle A \neq \angle B \neq \angle C$ ، إذن  $AB \neq AC$  لماذا؟

إذن أطوال أضلاع المثلث غير متساوية.



**مثال ٥ :** أستخدم البرهان غير المباشر لإثبات أن «إذا كان  $s^2$  عدد فردي، فإن  $s$  عدد فردي».

**الحل :** المعطيات:  $F$ :  $s^2$  عدد فردي

$N$ :  $s$  عدد فردي.

البرهان: باستخدام البرهان غير المباشر، لإثبات أن:  $F \leftarrow N$ ، نثبت أن:  $M \leftarrow F$

نفرض  $M$ :  $s$  عدد زوجي عبارة صائبة.

المطلوب: إثبات أن:  $F$ :  $s^2$  عدد زوجي.

$s$  عدد زوجي إذن  $s = 2k$  حيث  $k$  عدد صحيح

$\therefore s^2 = (2k)^2$

$= 4k^2$   $\therefore s$  عدد زوجي.

### ثالثاً: البرهان بالتناقض

لإثبات صحة العبارة ف ← ن بطريقة التناقض، نفرض أنها خاطئة، وهذا يعني أن (ف صائبة و ن خاطئة)، ونتسلسل بخطوات منطقية للوصول لنتيجة خاطئة أو لتناقض، ويكون سبب هذا التناقض هو الفرض أن العبارة ف ← ن خاطئة أي أن العبارة صائبة.

**مثال ٦ :** اشترى كمال قميصين بمبلغ يزيد عن ٣٠ دينار، وبعد عدة أسابيع سأله صديقه ماجد عن ثمن كل قميص، فلم يتذكر، أثبت أن ثمن أحد القميصين على الأقل يزيد عن ١٥ دينار.

**الحل :** المعطيات: نفرض أن ثمن القميص الأول س، و ثمن القميص الثاني ص

$$ف : س + ص < ٣٠$$

$$ن : س < ١٥ \text{ أو } ص < ١٥$$

المطلوب: إثبات صحة: ف ← ن .

نفرض ف صائبة، ن خاطئة، إذن  $ن \sim$  : س  $\geq ١٥$  و ص  $\geq ١٥$

$$\therefore س + ص \geq ٣٠ \text{ وهذا يتناقض مع كون } س + ص < ٣٠$$

إذن الافتراض أن ن خاطئة افتراض خاطئ  $\therefore$  ف ← ن صائبة.

**مثال ٧ :** إذا كانت و نقطة خارج المستقيم ل ( و  $\vec{L}$  )، فإنه لا يمكن رسم أكثر من عمود واحد على المستقيم ل يمر بالنقطة و .

**الحل :** المعطيات: و نقطة تقع خارج المستقيم ل .

ن : لا يمكن رسم أكثر من عمود واحد على المستقيم ل يمر بالنقطة و .

المطلوب: إثبات صحة: ف ← ن .

نفرض ف صائبة، ن خاطئة، إذن  $ن \sim$  : يمكن رسم أكثر

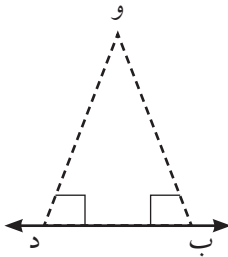
من عمود واحد على المستقيم ل يمر بالنقطة و .

نفرض أن و ب، و د عمودان مرسومان من النقطة و على

المستقيم ل،  $\therefore$  و ب د تشكل مثلثاً فيه زاويتان قائمتان،

وهذه نتيجة خاطئة.

لذلك الافتراض ن خاطئة افتراض خاطئ  $\therefore$  ف ← ن صائبة.



## رابعاً: الاستقراء الرياضي

تستخدم هذه الطريقة لإثبات كثير من النظريات والتعميمات في الرياضيات والمتعلقة بالأعداد الطبيعية. عند استخدام هذه الطريقة بالبرهان:

- نتحقق أن العبارة صحيحة عندما  $n = 1$ .
- نفرض أنها صحيحة عندما  $n = k$ ،  $k \in \mathbb{N}^*$
- نثبت صحتها عندما  $n = k + 1$

مثال ٨ : أثبت أن  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

الحل : أولاً: عندما  $n = 1$  فإن  $1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

إذن عندما  $n = 1$  العبارة صحيحة.

ثانياً: نفرض أن العبارة صحيحة عندما  $n = k$

أي أن:  $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

ثالثاً: نثبت صحتها عندما  $n = k + 1$ .

نعلم أن  $1 + 2 + 3 + \dots + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + 1$  بالفرض

$1 + 2 + 3 + \dots + k + 1 = (k+1) + k + \dots + 3 + 2 + 1$  لماذا؟

$(k+1) + \left(\frac{k}{2} + 1\right) =$  لماذا؟

$(k+1) + \left(\frac{k+2}{2}\right) =$  لماذا؟

$\frac{(k+1)(k+2)}{2} =$  لماذا؟

مثال ٩ :

أثبت أن  $1 - 3^n$  يقبل القسمة على ٢.

الحل :

أولاً: نتحقق من صحة العبارة عندما  $n = 1$   
 $1 - 3^1 = 1 - 3 = -2$  تقبل القسمة على ٢ عبارة صحيحة.

ثانياً: نفرض أن العبارة صحيحة عندما  $n = k$ ،  
أي أن:  $1 - 3^k$  يقبل القسمة على ٢  
أي أن:  $1 - 3^k = 2m$  حيث  $m$  عدد صحيح موجب.

ثالثاً: نثبت صحتها عندما  $n = k + 1$

$$1 - 3^{k+1} = 2m$$

$$\therefore 3(1 - 3^k) = 2m \times 3 \text{ بضرب الطرفين بالعدد } 3, \text{ أي أن: } 3 - 3^{k+1} = 2 \times 3m$$

$$\therefore 3 - 3^{k+1} = 1 - 3^{k+1} + 2 = 2 + 3m \text{ بجمع العدد } 2 \text{ للطرفين}$$

$$\therefore 3 - 3^{k+1} = 1 - 3^{k+1} + 2 = 2 + 3m, \text{ لكن } (2 + 3m) = \text{عدد صحيح مثل } 2 \text{ و... لماذا؟}$$

$$\therefore 3 - 3^{k+1} = 2 \text{ و}$$

$$\therefore \text{إذن } 1 - 3^{k+1} \text{ يقبل القسمة على } 2$$

$$\therefore \text{العبارة صحيحة عندما } n = k + 1$$

(أحاول أن أحل هذا المثال بطريقة أخرى).

مثال ١٠ :

$$\text{أثبت أن: } \frac{1}{2 \times 1} + \frac{1}{3 \times 2} + \frac{1}{4 \times 3} + \dots + \frac{1}{(n) \times (n+1)} = \frac{n}{1+n}$$

الحل :

أولاً: نتحقق من صحة العبارة عندما  $n = 1$

$$\text{أي أن: } \frac{1}{2 \times 1} = \frac{1}{(1+1)} = \frac{1}{2 \times 1}$$

ثانياً: نفرض أن العبارة صحيحة عندما  $n = k$

$$\text{أي أن: } \frac{k}{(1+k)} = \frac{1}{(1+k) \times k} + \dots + \frac{1}{4 \times 3} + \frac{1}{3 \times 2} + \frac{1}{2 \times 1}$$

ثالثاً: نثبت صحتها عندما  $n = k + 1$

$$\frac{1}{(k+2) \times (k+1)} + \left( \frac{1}{(k+1) \times k} + \dots + \frac{1}{4 \times 3} + \frac{1}{3 \times 2} + \frac{1}{2 \times 1} \right)$$

$$\text{(بتوحيد المقامات)} \frac{1}{(k+2) \times (k+1)} + \frac{k}{(k+1)} =$$

$$\frac{1 + (k+2)k}{(k+2) \times (k+1)} =$$

$$\frac{1 + k^2 + 2k}{(k+2) \times (k+1)} =$$

$$\text{(لماذا؟)} \dots \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+2) \times (k+1)} =$$

$$\frac{(k+1)^2}{(k+2) \times (k+1)} =$$

∴ العبارة صحيحة عندما  $n = k + 1$ .



## تمارين ومسائل ٢ - ٨:

- ١ أثبت أن: إذا كان ك عدداً فردياً فإن ك<sup>٢</sup> عدد فردي.
- ٢ إذا كانت ك، ل، م، ثلاثة أعداد صحيحة موجبة، وكان باقي قسمة ك على م = باقي قسمة ل على م، أثبت أن ك - ل يقبل القسمة على م.
- ٣ أستخدم أحد طرق البرهان لإثبات أن: إذا كان أ، ب عددين حقيقيين،  
فإن  $\sqrt{a^2 + b^2} \geq |a| + |b|$
- ٤ أستخدم البرهان غير المباشر لإثبات أن: إذا كان ك<sup>٢</sup> يقبل القسمة على ٣ فإن ك يقبل القسمة على ٣.
- ٥ قطع وليد مسافة تزيد عن ٣٦٠ كم في رحلة، وتوقف أثناء سفره مرتين فقط، أستخدم البرهان بالتناقض لإثبات أن وليداً قطع أكثر من ١٢٠ كم في إحدى مراحل رحلته الثلاث على الأقل.
- ٦ أثبت أن:  $1 - 2^{-n} = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$  باستخدام الاستقراء الرياضي.
- ٧ أثبت أن:  $2^n - 1 = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^1 + 2^0$  باستخدام الاستقراء الرياضي.

- ١ أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:  
 ١ إذا كانت  $F$  عبارة رياضية صائبة،  $N$  عبارة رياضية صائبة، ما العبارة الرياضية المركبة الصائبة فيما يأتي؟  
 (أ)  $F \leftarrow \sim N$  (ب)  $N \leftarrow \sim F$  (ج)  $F \sim N$  (د)  $F \sim V$
- ٢ ما نفي العبارة الرياضية  $(1 \geq 5) \wedge (7 \neq 4 + 3)$ ؟  
 (أ)  $(1 \geq 5) \vee (7 = 4 + 3)$  (ب)  $(1 < 5) \vee (7 = 4 + 3)$   
 (ج)  $(1 \geq 5) \vee (7 \neq 4 + 3)$  (د)  $(1 > 5) \vee (7 = 4 + 3)$
- ٣ ما الجملة التي تمثل عبارة رياضية فيما يأتي؟  
 (أ) عدد يقل عن  $s$  بـ  $1$   
 (ب) يا عالماً بحالي  
 (ج) شكراً لك  
 (د) الصفر عدد زوجي.
- ٤ ما العبارة الرياضية الصائبة فيما يأتي؟  
 (أ)  $\exists 3 - \leftarrow$  عدد نسبي  
 (ب)  $\exists 3 - \leftrightarrow 3 - \nexists$  ح  
 (ج)  $\exists 3 - \leftrightarrow 3 - > 5$   
 (د)  $\exists 3 - \leftrightarrow 3 - \nexists$  ح
- ٥ ما العبارة الرياضية التي تكافئ  $F$  فيما يأتي؟  
 (أ)  $\sim F$  (ب)  $F \sim 8$  (ج)  $\sim (F \leftarrow \sim F)$  (د)  $F \sim V$
- ٦ ما المعاكس الإيجابي للعبارة الرياضية  $\sim F \leftarrow N$ ؟  
 (أ)  $\sim F \leftarrow \sim N$  (ب)  $\sim N \leftarrow \sim F$  (ج)  $\sim N \leftarrow F$  (د)  $F \leftarrow N$
- ٧ ما مجموعة حل  $Q$  (س):  $s^2 - 3s - 18 = 0$ ، صفر،  $s \in P$ ؟  
 (أ)  $\{6\}$  (ب)  $\{6, 3\}$  (ج)  $\{3\}$  (د)  $\emptyset$
- ٨ ما مجموعة حل  $Q$  (س):  $s^2 + 1 = 0$ ، صفر،  $s \in P$ ؟  
 (أ)  $\{-1\}$  (ب)  $\{-1, 1\}$  (ج)  $\{1\}$  (د)  $\emptyset$
- ٩ ما نفي العبارة المسورة  $E$  س:  $s$  عدد مربع إذن  $s$  عدد زوجي؟  
 (أ)  $\forall s$ ،  $s$  ليس عدداً مربعاً أو زوجياً  
 (ب)  $\forall s$ ،  $s$  عدد مربع إذن  $s$  عدد زوجي  
 (ج)  $E$  س:  $s$  ليس عدداً مربعاً أو زوجياً  
 (د)  $\forall s$ ،  $s$  عدد مربع وليس زوجياً



٢ ما قيم صواب كل مما يأتي:

(أ)  $(1 \geq 2) \leftrightarrow (6 = 23)$

(ب)  $(1 < 2) \vee (6 \neq 23)$

(ج)  $(1 < 2) \leftarrow (6 \neq 23)$

(د)  $E$  س : هـ  $s^1 + s^2 = s^3$  ،  $s \exists$  ص

(هـ)  $\forall$  س  $\exists$  ح ، قاس - ظاس = ١

٣ أوضح تكافؤ أو عدم تكافؤ كل زوج من العبارات الرياضية الآتية:

(أ)  $f \leftarrow n$  ،  $n \leftarrow f$

(ب)  $f \leftarrow n$  ،  $\sim f \leftarrow \sim n$

(ج)  $f \leftarrow n$  ،  $\sim n \leftarrow \sim f$

٤ أثبت صحة العبارات الرياضية الآتية دون استخدام جداول الصواب:

(أ)  $(f \leftarrow n) \vee (f \leftarrow m) \equiv f \leftarrow (n \vee m)$

(ب)  $\sim f \vee (n \wedge m) \equiv (\sim f \vee n) \wedge (\sim f \vee m)$

٥ أثبت أن : إذا كان  $s \neq$  ص فإن  $أس \neq$  أص ، حيث  $أ < ٠$  ،  $أ \neq ١$

٦ أثبت باستخدام الاستقراء الرياضي أن :  $\frac{n^2(n+1)^2}{4} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$

أولاً: عناوين مشاريع طلابية مقترحة:

- ١) المنطق الرياضي في خدمة مبثني العلوم والتكنولوجيا.
- ٢) إعداد رحلات معرفية (web quest) عن وحدة المنطق.
- ٣) المنطق في مبحث اللغة العربية.

ثانياً: توظيف برامج حاسوبية

هناك كثير من البرامج الحاسوبية التي نستخدمها في حل بعض المسائل الرياضية، ومن هذه البرامج: برنامج مايكروسفت ماثيماتيكس (Microsoft Mathematics) عند الدخول إلى البرنامج، نجد كثيراً من التطبيقات الرياضية، ومن ضمنها (standard) نجد أيقونات خاصة بالمنطق مثل: `isTrue` ، `and` ، `or` ، `not` وكلها أيقونات معرفة للحاسوب. ويستخدم هذا التطبيق في:

أولاً: إيجاد قيم الصواب للعبارة الرياضية.

مثال ١: أجد قيمة الصواب للعبارة الرياضية  $(-5 > 5$  أو  $5 = 3 + 4)$

الحل: يمكن كتابة العبارة الرياضية المركبة  $(5 > -5$  or  $3 + 4 = 5)$  `isTrue` ثم نضغط `enter` فنحصل على قيمة الصواب `true`

مثال ٢: أجد قيمة الصواب للعبارة الرياضية.

(المضاعف المشترك الأصغر للعددين (٢، ١٠) يساوي ٣ أو  $15 = 3 \times 5$ )

الحل: يرمز للمضاعف المشترك الأصغر (Least Common Multiple (lcm

نكتب العبارة  $(3.5 = 15$  and  $lcm(2.10) = 3)$  `isTrue`

ثم نضغط `enter` فتظهر النتيجة `false`

مثال ٣: أحدد قيمة الصواب للعبارة  $((8 \neq 4) \sim 8) \sim (5 < 2)$

الحل: أدخل  $\text{isTrue}(\text{not}(2 > 5) \text{and} \text{not}(4 \neq 8))$  ثم نضغط enter فتظهر النتيجة  $\text{false}$

ثانياً: حل جمل مفتوحة (معادلات ومتباينات):

مثال ١: أحل الجملة المفتوحة  $1 - x^2 = 0$

الحل: أدخل  $1 - x^2 = 0$  ثم أضغط enter فتظهر النتيجة  $(x = 1 \text{ or } x = -1)$

مثال ٢: حل الجملة المفتوحة  $x^2 + x \geq 30$

الحل: أدخل  $x^2 + x \geq 30$  ثم أضغط enter فتظهر النتيجة  $x \leq -6 \text{ or } x \geq 5$

### مسائل:

١ أحدد قيم الصواب للعبارات الرياضية مستعيناً ببرنامج Microsoft Mathematics المايكروسوفت ماثيماتيكس

$$(1) \quad |5| = 5 \text{ أو } |3| = 3$$

$$(2) \quad 8 \geq 10 \text{ و المضاعف المشترك الأصغر للعددين ٨، ٢٠ هو ٤٠}$$

$$(3) \quad \pi = \text{صفر أو جتا } \pi = 1$$

٢ أحل الجمل المفتوحة الآتية علماً بأن مجموعة التعويض هي ح:

$$(1) \text{ ق(س): } \sqrt{2 + 2} = 5 \quad (2) \text{ م(س): } 1 = 3$$

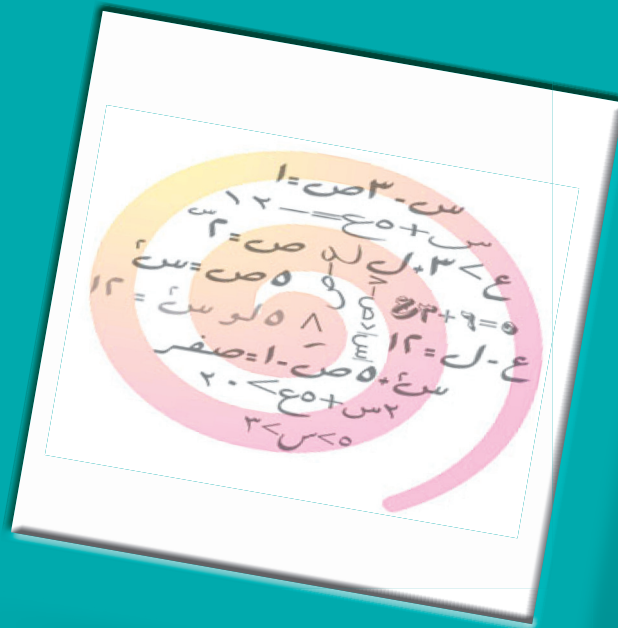
$$(3) \text{ ع(س): حاس جتاس } = 0 \quad (4) \text{ س } 2 - 3 \text{ س } - 10 \geq 0$$

روابط إلكترونية

- <https://www.microsoftmathematics.com>
- <http://www.mathlogic.com>



## المعادلات والمتباينات



أقترح معادلةً عامةً للنجاح في الحياة

تبرز أهمية المعادلات والمتباينات في أنها تترجم المسائل الحياتية إلى لغة رياضية تساعد الطلبة على حلها.

يتوقع من الطلبة بعد الانتهاء من دراسة الوحدة أن يحققوا الأهداف الآتية:

- ١ حلّ نظام مكون من ثلاث معادلات خطّية.
- ٢ حلّ نظام من معادلتين إحداهما خطّية، والأخرى تربيعية.
- ٣ حلّ نظام من معادلتين تربيعيتين.
- ٤ حلّ معادلات أسّية، ولوغاريتمية.
- ٥ حلّ معادلات تتضمن القيمة المطلقة.
- ٦ حلّ نظام من متباينتين خطّيتين بمتغيرين.

نشاط ١:

تخرج أمجد من جامعة بوليتيكنك فلسطين تخصص تكنولوجيا المعلومات، ثم حصل على وظيفة في إحدى الشركات الفلسطينية، وبعد عام من تعيينه تم تثبيته في الشركة، وحصل على زيادة مقدارها ١٠٪ من راتبه، بالإضافة إلى ٣٪ علاوة غلاء معيشة، وكان المبلغ الذي قبضه بعد التثبيت ٥٦٥ ديناراً. فكم كان راتبه عند تعيينه؟  
كلّف معلم الرياضيات طلاب صفه بحل هذه المسألة، وكان حلّا كمال وسامر كما يأتي:

| حلّ كمال                         | حلّ سامر   |
|----------------------------------|--|
| نفرض أن راتبه عند توظيفه = س     | نفرض أن راتبه قبل عام = س                        |
| الزيادة = ١٠, ٠٣ + ٠, ١٣ = ١٣, ٠ | الراتب الجديد = س + ٠, ١ + س + ٠, ٠٣ = س + ٠, ١٣ |
| س = ٥٦٥ × (١٣ - ١)               | س = ١٣, ١  |
| س = ٥٦٥ × ٠, ٨٧                  | س = ١٣, ١  |
| س = ٤٩١, ٥٥ ديناراً.             | س = ٥٦٥  |
|                                  | ومنها س = $\frac{٥٦٥}{١, ١٣} = ٥٠٠$ دينار        |

أناقش الحلين، وأبين الصحيح منهما؟ وأرى إن كان هناك طرق أخرى للحل؟

نشاط ٢:

سافر خالد مع أبيه لزيارة عمه في الأردن، وأثناء الزيارة تعرّف على ابن عمه رامي. سأل خالد والده كم عمر ابن عمي رامي، فقال الأب: يا بني: إنه يكبرك بأربع سنوات، كما أن خمسة أمثال عمره مضافاً إلى مثلي عمرك، يساوي عمر جدك وهو ٨٣ سنة.

الحل :

إذا فرضنا أن عمر خالد س سنة، وعمر رامي ص سنة.

$$٨٣ = س + ٤ + ٥ص + ٢س$$

ثم أحل النظام بإحدى الطرق التي تعلمتها، وأتأكد أن عمر رامي يساوي ١٣ سنة، وعمر خالد يساوي ٩ سنوات.

أفكر وأناقش : إذا انخفض سعر سلعة في شهر كانون ثاني بنسبة ١٠٪ ثم ارتفع في شهر آذار بنسبة ١٠٪. فهل يرجع السعر إلى سعره الأصلي في شهر كانون ثاني؟

### نشاط ٣:

ينتج مصنع ألبان في مدينة طوباس ثلاثة أحجام من عبوات اللبن (الصغيرة، والمتوسطة والكبيرة) فإذا كان مجموع أثمان عبوة واحدة من كل حجم يساوي ٩ دنانير، ومجموع أثمان علبتين من الحجم الصغير وعلبة من الحجم المتوسط يقل بمقدار دينار عن مثلي ثمن علبة من الحجم الكبير، وكان مجموع أثمان ثلاثة علب من الحجم الصغير وعلبة من الحجم المتوسط، يزيد عن ثمن علبة من الحجم الكبير بمقدار ٥ دنانير. أجد سعر كل حجم من العبوات.



### الحل :

نفرض أن ثمن الحجم الصغير س والمتوسط ص والكبير ع فيكون:

$$س + ص + ع = ٩ \quad (١) \text{ (لماذا؟)}$$

$$٢س + ص - ع = ١ \quad (٢) \text{ (لماذا؟)}$$

$$٣س + ص - ع = ٥ \quad (٣) \text{ (لماذا؟)}$$

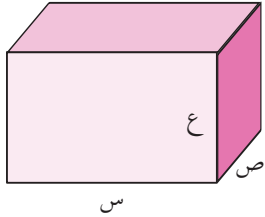
$$\text{بطرح (١) من (٢) ينتج } س - ع = ١٠ \quad (٤)$$

$$\text{بطرح (٣) من (٢) ينتج } -س - ع = ٦ \quad (٥)$$

أجد قيم س و ع ثم أتأكد أن  $ع = ٤$  دنانير،  $س = ٢$  دينار، ثم أجد قيمة ص من إحدى المعادلات السابقة، وأتأكد أن  $ص = ٣$  دنانير.

## نشاط ٤:

أراد عامل بناء أن يبني بئراً على شكل متوازي مستطيلات، بحيث يقل طولها عن مجموع عرضها وارتفاعها بمقدار ٢ متر، ومجموع أطوال أبعادها يساوي ١٢ متراً، فإذا كان محيط قاعدتها يساوي ١٨ متراً. أجد أبعاد هذه البئر.



أفرض أن الطول س متراً، والعرض ص متراً، والارتفاع ع متراً

$$(١) \dots\dots\dots ٢ - = ع - ص - س$$

$$(٢) \dots\dots\dots ١٢ = ع + ص + س$$

$$(٣) \dots\dots\dots ١٨ = ص٢ + س٢$$

أتحقق أن الطول يساوي ٥ م والعرض يساوي ٤ م والارتفاع يساوي ٣ م

## تمارين ومسائل ٣-١:

$$١ \quad \sqrt{٧٥} = س - ٢ص ، \quad \sqrt{٨} = س + ص$$

٢ إذا كان ٣ جا + ٢ جتا =  $\frac{1}{٢}$  وكان ٢ جا - ٣ جتا =  $\frac{٥}{٢}$  أجد أ، ب بحيث إن: أ، ب تنتمي للفترة  $[\pi, ٠]$ .

$$٣ \quad \text{أحل النظام الآتي: } ٧س + ٥ص - ٣ع = ٨$$

$$٣س - ٥ص + ٢ع = ٤$$

$$ع + ٥س + ٣ص = ٠$$

٤ تعرض إحدى شركات الاتصالات الخليوية الفلسطينية ثلاثة عروض كل عرض يقدم عدد من الدقائق المجانية، فإذا اشترك شخص في العروض الثلاثة معاً، فإنه يحصل على ٤٥٠ دقيقة مجانية، وإذا اشترك في العرضين الأول والثاني، فإنه يحصل على ٢٥٠ دقيقة مجانية، وإذا اشترك في العرضين الثاني والثالث، فإنه يحصل على ٣٥٠ دقيقة مجانية. أجد عدد الدقائق المجانية لكل عرض.

٥ اتفق ثلاثة إخوة من قرية واد فوكين قضاء بيت لحم على أن يزرع كل واحد منهم نوعاً واحداً من الأشجار، فإذا اتفقوا على أن يزرع الأول أرضه زيتوناً، ويزرع الثاني أرضه لوزاً، ويزرع الثالث أرضه تفاحاً. فإذا كان عدد الأشجار التي زرعت من كل نوع، جميعها زيتون ما عدا ٥٠ شجرة، وجميعها لوز ما عدا ٦٠ شجرة، وجميعها تفاح ما عدا ٧٠ شجرة. أجد كم شجرة من كل نوع زرع الإخوة الثلاثة؟



## حلّ نظام من معادلتين في متغيرين: إحداهما خطيّة، والأخرى تربيعيّة

### Solving of System with Linear and Quadratic Equations of Two Variables



الحرم الإبراهيمي مكان مقدس للمسلمين، وهو مبني من حجارة كبيرة (أنظر الشكل المجاور) فإذا كان طول أحد الحجارة يزيد عن عرضه بمقدار ٦ متر تقريباً، وطول قطره يساوي  $\sqrt{57}$  متراً تقريباً.

أفرض أن طول الحجر س وعرضه ص

$$س = ص + ٦ \quad (\text{لماذا؟})$$

$$س^2 + ص^2 = ٥٧ \quad (\text{لماذا؟})$$

$$س(ص + ٦) + ص^2 = ٥٧$$

باستخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية، والآلة الحاسبة، أتأكد أن طولها يساوي ٤, ٧م تقريباً، وعرضه يساوي ٤, ١م تقريباً.

### مثال ١:

يعرض أحد محلات بيع الأجهزة الكهربائية عدة مقاسات من شاشات LCD فإذا اشترى شخص شاشةً من مقاس ٥٠ بوصة (إنش) «المقاس يمثل طول قطر الشاشة» أجد أبعاد الشاشة إذا كان طولها يزيد عن عرضها بمقدار ١٠ بوصة.



### الحل:

نفرض أن الطول س والعرض ص

$$س^2 + ص^2 = ٢٥٠٠$$

$$س = ص + ١٠$$

$$س(ص + ١٠) + ص^2 = ٢٥٠٠$$

$$٠ = ١٢٠٠ - ص + ١٠ + ص^2$$

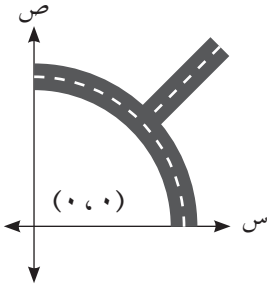
$$٠ = (٤٠ + ص)(٣٠ - ص)$$

$$ومن هنا ص = ٤٠ - مرفوضة (لماذا؟)$$

$$أو ص = ٣٠ = عرض الشاشة و س = ١٠ + ٣٠ = ٤٠ = طول الشاشة.$$

نشاط ٢:

شارعان أحدهما على شكل منحنى معادلته  $٢٨ = ٢ص٤ + ٢س٣$  والآخر مستقيم معادلته  $٢ص = ٢ + س$  يلتقيان في مفترق طرق. أجد إحداثيي نقطة التقاطع. على اعتبار أن مركز الشارع المنحني هو  $(٠, ٠)$



(انظر الشكل المجاور) (الوحدات بالكيلومتر)

$$٢٨ = ٢ص٤ + ٢س٣$$

$$٢ص = ٢ + س \text{ ينتج أن } س = ٢ص - ٢$$

$$٢٨ = ٢ص٤ + ٢(٢ص - ٢)٣$$

$$٠ = ٢ - ٢ص٣ - ٢ص٢$$

$$٠ = (٢ - ص)(١ + ٢ص)$$

أجد قيم ص و س ثم أتأكد أن نقطة التقاطع هي  $(٢, ٢)$

نشاط ٣:

مثلث رؤوسه أ، ب، ج مرسوم داخله دائرة، بحيث تماس أضلاعه من الداخل، فإذا كانت

$$أ \left( ٤, \frac{١}{٣} \right), ب (٨, -١) \text{ ومعادلة الدائرة هي } ١٣ = ٢ص + ٢س$$

ميل المستقيم أب = .....

$$\frac{١٣ + ٢س}{٣} = ص \text{ هي معادلة المستقيم أب}$$

أعوض قيمة ص في معادلة الدائرة، ثم أتأكد أن نقطة التماس هي  $(٣, ٢)$ .

## تمارين ومسائل ٢-٣:

- ١ أحلّ النظام الآتي:  $س + ص = ٥$  ،  $٣س - ٢ص = ١٩$
- ٢ سجادة مستطيلة الشكل طولها يزيد عن عرضها بمقدار متر واحد، وقطرها يساوي  $\sqrt{١٣}$  متراً، أجد أطوال أبعادها.
- ٣ أجد نقطة/ نقط تقاطع المستقيم الذي ميله يساوي ٣ ويمر بالنقطة (٢، ٥) مع المنحنى الذي معادلته  $٥ = ٢ص - ٣س$
- ٤ أجد نقطة تقاطع المستقيم  $٢س + ٣ص = ٦$  مع المنحنى  $٨ = ٢(ص - س) + ٢(ص + س)$
- ٥ طاولة اجتماعات بيضاوية الشكل محاطة بإطار معدني معادلته  $١٦س + ٢٥ص = ٦٤$  (الوحدات بالأمتار). مرسوم على سطحها خطان مستقيمان متقاطعان في مركز الطاولة (٠، ٠) ومعادلتهما هي:

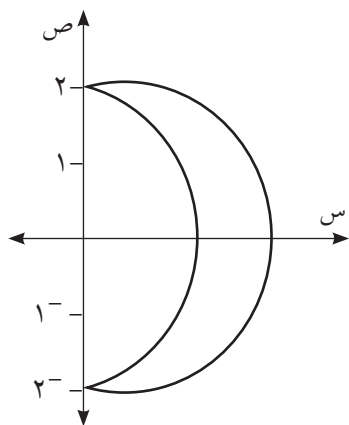


$ص = ٤\sqrt{٣} - ٣س$  ، أجد نقاط تقاطع المستقيمين مع إطار هذه الطاولة.

### حلّ نظام مكون من معادلتين تربيعيتين في متغيرين

٣ - ٣

Solving of System with Two Quadratic Equations with Two Variables



نشاط ١:

الشكل المجاور يمثل مخططاً لهلال،

معادلة القوس الداخلي هي  $ص^2 + س^2 = ٤$

ومعادلة القوس الخارجي هي  $ص^2 + (س - ١)^2 = ٥$

أتحقق أن نقطتي التقاطع هما  $(٢، ٠)$ ،  $(-٢، ٠)$

بركة سباحة سطحها بيضاوي يحيط بها ممر صغير معادلته  $٢س^2 + ٣ص^2 = ٦٩$  فإذا قسمت إلى ثلاث مناطق (منطقتي أ و ج للأطفال، والمنطقة ب للكبار) فإذا حددت المناطق بحبال تقع على منحنى العلاقة  $ص^2 - س^2 = ١٢$  كما في الشكل المجاور. أجد نقط تقاطع الحبال مع أطراف البركة على اعتبار أن مركز البركة هو نقطة الأصل.

مثال ١:

لإيجاد نقط تقاطع الحبال مع أطراف البركة نحل النظام:

$$٢س^2 + ٣ص^2 = ٦٩ \dots (١)$$

$$ص^2 - س^2 = ١٢ \dots (٢)$$

$$٣س^2 - ٣ص^2 = ٣٦ \text{ (لماذا؟)}$$

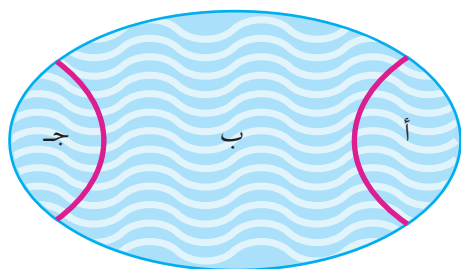
$$١٠٥ = ٢س^٥$$

$$\text{ومنها } س = \pm \sqrt{٢١}$$

$$\therefore ص^٢ = ١٢ - ٢١ = ٩$$

$$\text{ومنها } ص = \pm ٣$$

$$\therefore \text{نقط التقاطع هي } (٣ \pm، \pm \sqrt{٢١})$$



الحل :

مثال ٢ :

أحلّ النظام الآتي:  $س + ٢ص = ٢٥$  ،  $(س + ٢ص) + (س - ٢ص) = ١٤٦$

الحل :

$$(س + ٢ص) + (س - ٢ص) = ١٤٦$$

بفك الأقواس والاختصار، ينتج:  $٧٣ = ٢ص + ٤س$

ومنها  $س + ٢ص = ٢٥$  ،  $٧٣ = ٢ص + ٣س$  ، لكن  $س + ٢ص = ٢٥$

$$٧٣ = ٢ص + ٣س$$

$$١٦ = ٢ص$$

ومنها  $س = ٣ \pm$  أي أن نقط التقاطع  $(٣ \pm ، ٤ \pm)$

مثال ٣ :

النقطة و(س ، ص) تتحرك في المستوى، بحيث يتحدد موقعها حسب العلاقتين الآتيتين:

$$س = ٣جتان ، ص = ٤جان$$

أجد نقط تقاطع مسار هذه النقطة مع منحنى العلاقة  $١٦س - ٩ص = ١٤٤$

الحل :

بتربيع المعادلتين وجمعها ينتج أن:  $س = \frac{ص}{٣}$  ، كذلك  $جان = \frac{ص}{٤}$

$$١ = جان + جتان = \frac{ص}{١٦} + \frac{ص}{٩} \quad (\text{لماذا؟})$$

$$١٦س + ٩ص = ١٤٤ \dots \dots \dots (١)$$

$$١٦س - ٩ص = ١٤٤ \dots \dots \dots (٢)$$

$٣٢س = ٢٨٨$  ومنها ينتج أن  $س = ٣ \pm$  ،  $ص = ٠$

أي أن نقطتي التقاطع هما  $(٣ \pm ، ٠)$

تمارين ومسائل ٣-٣:

١ أحل أنظمة المعادلات الآتية:

أ  $١٠٠ = ٢ص + ٢س$

$٨ = ٢ص - ٢س$

ب  $٠ = ٤١ - ٢ص + ٢س$

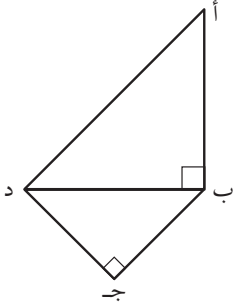
$٢ = ٢ص - ٢س$

٢ غرفة مستطيلة الشكل، طول قطرها يساوي  $٣٤\sqrt{٧}$  م، وثمانية أمثال مربع عرضها يقل عن سبعة أمثال مربع طولها بمقدار  $١٠٣$  م، فما بعدها؟

٣ أجد نقطة/ نقط تقاطع المنحنى الذي معادلته  $(س - ٣ص) + (س + ٣ص) = ٢٢$  مع المنحنى الذي

معادلته  $٢ = ٢ص - ٢س$

٤ استورد تاجر نوعين من البلاط على شكل مستطيل، فإذا كان قطر أي قطعة من النوع الأول يساوي  $٥٠$  سم، وطول قطر أي قطعة من النوع الثاني  $١٠\sqrt{٥}$  سم، وكان طول القطعة من النوع الأول يساوي ضعف طول القطعة من النوع الثاني، وعرض أي قطعة من النوع الأول يساوي  $٣$  أضعاف عرض أي قطعة من النوع الثاني. فما طول وعرض كل قطعة من النوعين؟



٥ قطعة أرض موضحة في الشكل المجاور، يراد عمل سور حولها، أجد

طول هذا السور إذا كان أب يساوي ضعف ب جـ

وكان أد =  $٥٠$  م، دج =  $٤٠$  م

**نشاط ١:** من خلال معلوماتك في الكيمياء، ماذا نعني بالمول؟ وما عدد أفوجادرو؟ وما كتلة الإلكترون؟ نلاحظ أن الكميات الكبيرة جداً، والكميات الصغيرة جداً تكتب بالصورة العلمية واستخدام الأسس (لماذا؟)

### أولاً: حل معادلات أسّيّة:

**مثال ١:** أحل المعادلة الأسّيّة الآتية :  $٤ = ٨^{س+١}$

**الحل :**  $٢^{س+٣} = ٢^{٣+٣}$  (لماذا؟)

ومن هنا  $٦ = ٣ + س$

وينتج أن  $س = ١$  (أتحقق من صحة النتيجة)

**مثال ٢:** يتناقص سعر سيارة جديدة في أول ٥ سنوات بمعدل ٢٠٪ سنوياً، فإذا اشترى شخص سيارة قبل عدة سنوات بسعر ٢٠٠٠٠ دينار، وباعها في العام ٢٠١٦ بسعر ١٠٢٤٠ ديناراً.

١ ما هي سنة إنتاج السيارة؟

٢ متى يصبح سعرها يساوي ٩٦، ٤٠٪ من سعرها الأصلي؟

**الحل :** ١ سعر السيارة بعد ن من السنوات  $= ٢٠٠٠٠(٠,٨)^ن$  (لماذا؟)

$$١٠٢٤٠ = ٢٠٠٠٠(٠,٨)^ن$$

$$٣(٠,٨) = \frac{١٠٢٤٠}{٢٠٠٠٠} = ٠,٨(٠,٨)^ن$$

إذن قيمة  $ن = ٣$  سنوات، أي أن السيارة تم إنتاجها عام ٢٠١٣

٢ سعر السيارة  $= ٤٠٩٦ = ٢٠٠٠٠ \times ٠,٨٩٦ = ٨١٩٢$  ديناراً.

إذن  $٨١٩٢ = ٢٠٠٠٠ \times (٠,٨)^ن$ ،  $٤(٠,٨) = (٠,٨)^ن$

$ن = ٤$  أي في العام ٢٠١٧

نشاط ٢: أحل المعادلة  $٩ = ٦ - ٦ - س$   $٠ = ١ - ٦ - س$

$$١ = ٦ - س$$

إذن  $س = ٦ - ٠ = ٦$  (لماذا؟)

$$س = ٣$$

نشاط ٣: أحل المعادلة  $٤ = \frac{٨ \times ١٠ س^٣}{٢ \times ١٠ س^٥}$

أختصر وأتحقق من أن:  $١٠ = ١٠ س^٢ - س$  وأن  $س = ٢ -$

مثال ٣: إذا كان ق(س) =  $٤س - ٢(س+١)$ ، وكان ق(ب) =  $٤٨$  أجد قيمة ب

الحل :

$$ق(ب) = ٤٨$$

$$٤٨ = ٤ - ٢(ب+١)$$

$$٠ = ٤٨ - ٢(ب+١) - ٤$$

$$٠ = ٤٨ - ٢(ب+١) - ٤$$

$$٠ = (٦ + ب)(٨ - ب)$$

ومنها ينتج أن  $ب = ٣$  (لماذا؟)



## ثانياً: حل معادلات لوغاريتمية

ناقش: أقرن بين حل المعادلة  $٢٥ = ٥ س$  والمعادلة  $١٠ = ٥ س$

حل المعادلات الأسية بالطرق العادية ليس سهلاً دائماً؛ لذلك نلجأ إلى استخدام اللوغاريتمات لحل المعادلات الأسية، ففي النشاط السابق حل المعادلة  $١٠ = ٥ س$  نأخذ اللوغاريتم العادي (الأساس ١٠) للطرفين فينتج أن:

$$لو(١٠) = لو(٥ س) \text{ (لماذا؟) ومنها ينتج أن } س لو = ١ \text{ (لماذا؟) ومنها } س = \frac{١}{لو٥} \approx ٤٣, ١$$



مثال ٤ : أحل المعادلة الآتية: لو<sub>٣</sub> س + لو<sub>٣</sub> (س + ٦) = ٣

الحل :

$$\text{لو}_3(س + ٦) = ٣$$

ومنها ينتج أن س<sup>٢</sup> + ٦س - ٢٧ = ٠ (لماذا؟)

$$٠ = (س - ٩)(س - ٣)$$

ومنها ينتج أن س = ٩- (مرفوض. لماذا؟) أو س = ٣ (مقبول)

نشاط ٤ : أحل المعادلة الآتية: ٢(لو<sub>٣</sub> س) - ٥ لو<sub>٣</sub> س - ٣ = ٠

إرشاد: أفرض ص = لو<sub>٣</sub> س ثم أحل المعادلة الناتجة

$$\text{وأتحقق من أن } س = \frac{١}{٢\sqrt{٧}} \text{ أو } س = ٨$$

نشاط ٥ : أحل المعادلة الآتية: ٦<sup>٣س</sup> = ٢٠ وأتحقق من أن س =  $\frac{\text{لو}_3 ٢٠}{٣}$  ≈ ٠,٥٦

مثال ٥ : أحل المعادلة الآتية: لو<sub>٥</sub> س - لو<sub>٥</sub> (س - ١) = لو<sub>٥</sub> س

الحل :

$$\text{لو}_5 س = \frac{\text{لو}_5 س}{١ - س}$$

$$\text{ومنها ينتج أن } س = \frac{\text{لو}_5 س}{١ - س}$$

$$\text{ومنها ينتج أن } س^٢ - س = ٥$$

$$٠ = س^٢ - ٦س$$

ومنها ينتج أن س = ٠ (مرفوض. لماذا؟) أو س = ٦ (مقبول)

## تمارين ٣ - ٤:

١ أحلّ كلاً من المعادلتين الآتيتين:

أ  $٤س^٢ - ٨س = ٠$

ب  $٥س^٢ - ٦س + ٦ = ٠$  ، حيث هـ العدد النيبيري

٢ أحلّ المعادلة الآتية:  $٣(١+س^٢) - ٣(١+س) - ٣(٤+س) + ٨١ = ٠$

٣ أحلّ المعادلة الآتية:  $٣س - لو٢س = ٣(٤ - س)$

٤ أحلّ المعادلتين الآتيتين: (١)  $٢لو٢س + لو٢٦ = ٢$  (٢)  $(لو٢س) = لو٢س$

٥ إذا كان ق(س) = لو٢س<sup>٣</sup> ، وكان هـ(س) = ٥ - لو٢س<sup>٢</sup> أجد نقطة تقاطع المنحيين.

٦ إذا كانت أسعار الأراضي في منطقة معينة تعطى بالعلاقة  $ص = ٢ \times ٠.٢(٠.٢)^ن$  حيث ص هو سعر الدونم بعد ن سنة. فإذا اشترى شخص هذا العام أرضاً مساحتها ١ دونم بسعر ١٥٠٠٠٠ دينار فبعد كم سنة يصبح سعرها ٦٠٠٠٠٠ دينار؟

نشاط ١:

أعلنت إحدى وكالات الأنباء عن تأجيل إطلاق مركبة فضائية، فهل خطر ببالك لماذا يتم التأجيل؟  
لاشك أن هنالك عدة أسباب لذلك، من بينها الحالة الجوية. إذ يجب أن تكون درجة الحرارة عند  
إطلاق المركبة بين ٣٠ و ١٠٠ فهرنهايت، وأن لا تزيد سرعة الرياح عن ٥٠ كم/س.  
كيف يمكن تحديد الحالات التي يمكن إطلاق المركبات الفضائية فيها؟



هل يمكن كتابة متباينات، أو معادلات تمثل هذه  
الحالات؟ هل يمكن تمثيلها بيانياً؟

عند حل نظام مكون من متباينتين خطيتين بمتغيرين:  
أولاً: أمثل كل متباينة في النظام بيانياً، وأظلل مجموعة  
الحل لها.

ثانياً: أحدد المنطقة المظللة المشتركة بين مناطق حل  
متباينات النظام، والتي تمثل منطقة حل النظام.

أتعلم: عند تمثيل الخط المستقيم الممثل لمعادلة المتباينة، يكون هذا الخط متصلًا عندما يكون في إشارة التباين  
مساواة، ويكون هذا الخط متقطعاً عندما لا يكون هناك إشارة مساواة.

نشاط ٢:

في مدرسة فلسطين الثانوية المختلطة، إذا كان عدد الذكور يزيد عن ١٥٠ طالباً، وعدد الإناث  
يزيد عن ١٢٠ طالبة، فإذا كان عدد طلبة المدرسة لا يزيد عن ٣٠٠ طالب.

أفرض أن عدد الذكور  $x$  وعدد الإناث  $y$

المتباينة التي تمثل عدد الطلبة الذكور هي .....

المتباينة التي تمثل عدد الطالبات هي .....

المتباينة التي تمثل عدد طلبة المدرسة هي .....

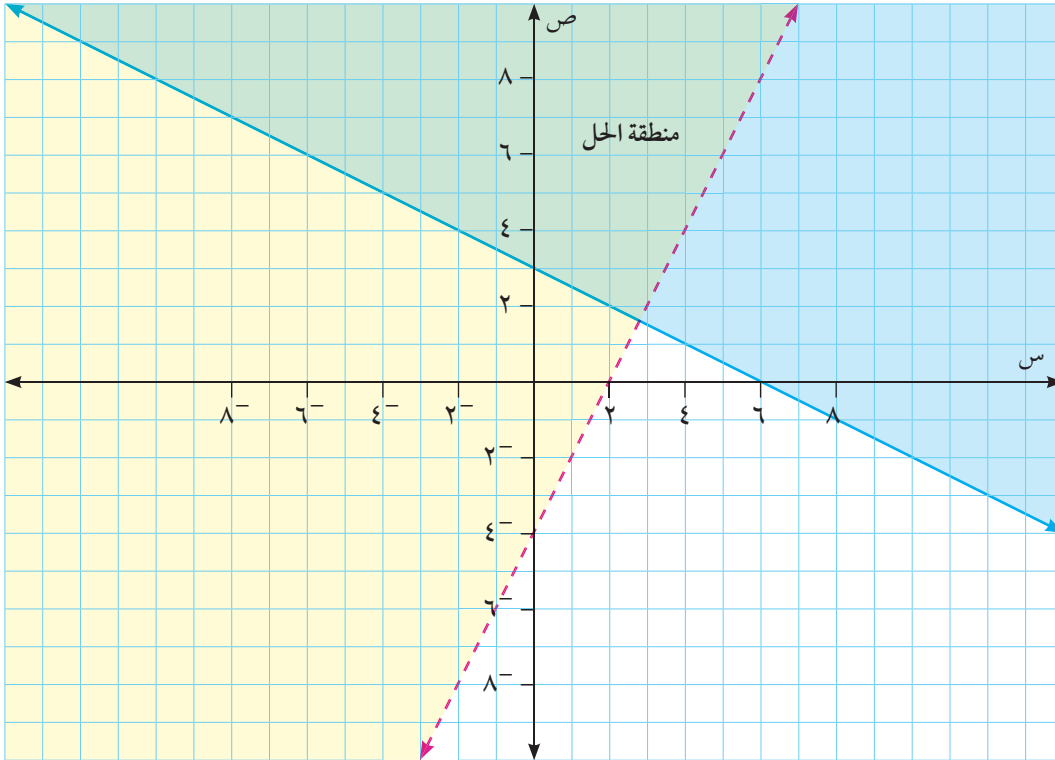
هل يمكن تمثيل هذه المتباينات على المستوى البياني؟

مثال ١ :

أمثل بيانياً مجموعة الحل لنظام المتباينات الآتية:  
 $2s - 6 > v$  ،  $2s - 4 \geq v$  .

الحل :

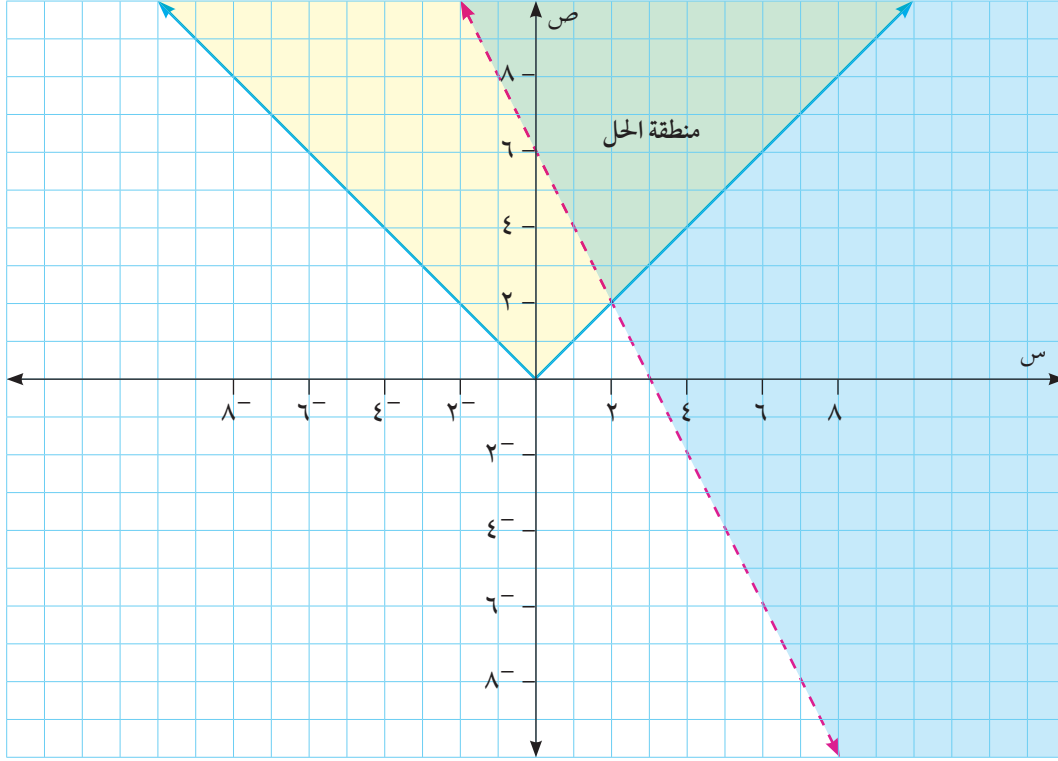
نمثل الخط المستقيم  $v = 2s - 4$  ، والمستقيم  $v = 2s - 6$



ألاحظ أن هنالك منطقةً مشتركةً بين منطقتي حل المتباينتين، ومجموعة الأزواج المرتبة الواقعة في هذه المنطقة تمثل مجموعة حل للنظام.  
 أتحقق أن  $(2, 4) \notin$  مجموعة حل النظام السابق.  
 أتحقق أن  $(0, 0) \notin$  مجموعة حل النظام السابق.

مثال ٢ : أمثل بيانياً مجموعة الحل لنظام المتباينات الآتي:  $|س| \geq ٦$  ،  $ص > ٢س - ٦$  .

الحل : نمثل منطقة الحل لكل متباينة في المستوى البياني، فتكون منطقة الحل هي المنطقة المشتركة.



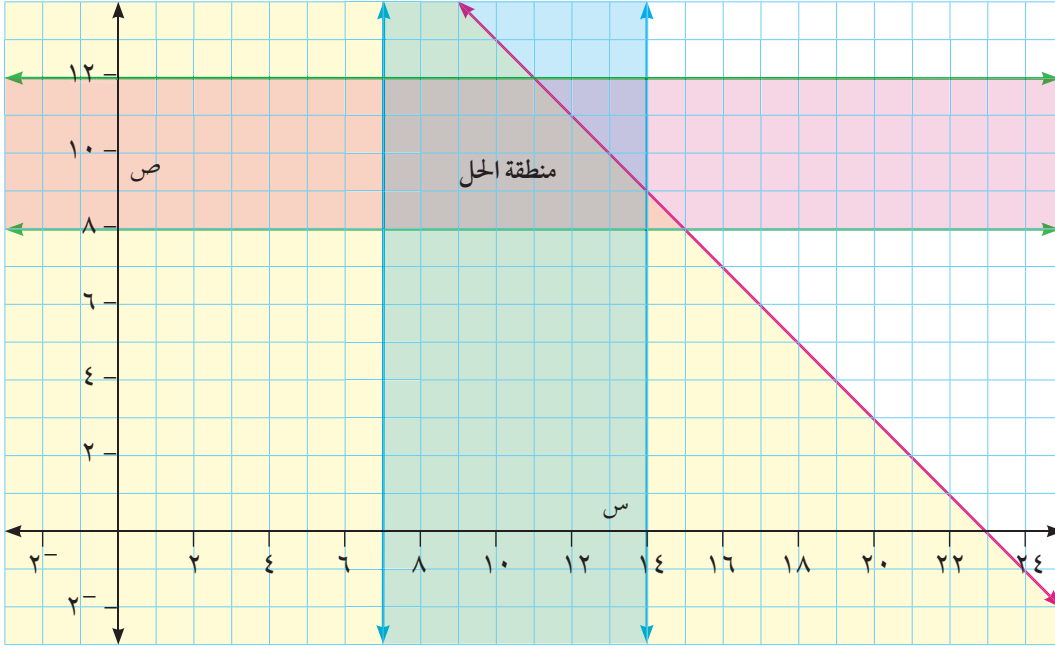
مثال ٣ : لدى خلود ٢٥ ساعة على الأكثر للاستعداد لأداء ثلاثة امتحانات في الرياضيات والفيزياء

والتاريخ، وقد وضعت جدولاً زمنياً لذلك، فخصصت ساعتين لدراسة التاريخ، وخصصت من ٧ إلى ١٤ ساعة لدراسة الرياضيات، أما الفيزياء فخصصت لدراستها من ٨ إلى ١٢ ساعة. أكتب نظام متباينات خطية يمثل هذا الجدول الزمني، وأمثله بيانياً.

الحل : أفرض أن عدد الساعات المخصصة لدراسة الفيزياء ص، وعدد الساعات المخصصة لدراسة

الرياضيات س، ألاحظ أن  $س \leq ٠$  ،  $ص \leq ٠$  ، ... (لماذا؟)

$8 \leq \text{ص} \leq 12$ ،  $7 \leq \text{س} \leq 14$ ، وان  $\text{ص} + \text{س} \geq 23$  ... (لماذا؟)  
 أمثل مجموعة الحل لهذه المتباينات على النحو الآتي:



### تمارين ومسائل ٣-٥:

- ١ أحدد مجموعة الحل لنظام المتباينات الآتي بيانياً:  $2\text{س} + 1 \geq \text{ص}$ ،  $\text{ص} \geq 8$ ،  $4\text{س} + 3\text{ص} \leq 8$ .
- ٢ أحدد مجموعة الحل لنظام المتباينات الآتي بيانياً:  $6\text{س} - 2\text{ص} \leq 12$ ،  $3\text{س} + 4\text{ص} < 8$ .
- ٣ اشترك سعيد وأسيد في تدريب للتحضير للمباراة النهائية، فإذا كانت عدد ساعات التدريب اليومي لسعيد لا تقل عن أربع ساعات، ولا تزيد عن ٨ ساعات، وعدد ساعات التدريب اليومي لأسيد لا تقل عن ساعتين، ولا تزيد عن ٥ ساعات، وكانت عدد ساعات التدريب لكليهما لا تزيد عن ١٠ ساعات، أكتب نظام متباينات خطية يمثل ساعات التدريب، وأمثله بيانياً.

**نشاط ١:** في سنة ٢٠١٣ اجتاحت فلسطين موجة باردة، وقد تساقطت الثلوج بكثافة، والجدول الآتي يمثل درجات الحرارة في سبعة أيام متتالية من أيام الشتاء في مدينة حلحول.

| اليوم           | السبت | الأحد | الاثنين | الثلاثاء | الأربعاء | الخميس | الجمعة |
|-----------------|-------|-------|---------|----------|----------|--------|--------|
| درجة الحرارة س° | ٧     | ٦     | ٣       | ٠        | ١-       | ٢-     | ٣-     |

الفرق بين أعلى درجة حرارة وأدنى درجة = .....

بفرض أن س هي درجة الحرارة في أحد الأيام ماذا تعني  $|س| = ٣$

وهذه درجات الحرارة ليومي ..... و.....

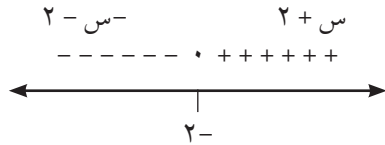
**نشاط ٢:** أحلّ المعادلة الآتية:  $|٢س - ٦| = ١٦$

$٢س - ٦ = ١٦$  ..... (١) أو  $٢س - ٦ = -١٦$  ..... (٢) (لماذا؟)

من (١)  $٢س = ١٠$  ومنها  $س = ٥$  . أتتحقق من (٢) أن  $س = ١١$

أفكر وأناقش : ما العلاقة بين  $|أ - ب|$  و  $|ب - أ|$

**مثال ٣:** أحلّ المعادلة الآتية :  $|٢س + ٣| = ١٢$



**الحل :** بإعادة تعريف  $|٢س + ٣|$  والاستعانة بخط الأعداد

عندما  $س > -٢$ ، تكون  $س - ٢ = ١٢ - ٣س$

ومنها  $س = \frac{٥}{٣}$  ترفض (لماذا؟)

عندما  $س \leq -٢$ ، تكون  $س + ٣ = ١٢ - ٣س$

ومنها  $س = ٧$  تقبل (لماذا؟)

**نشاط ٣:**

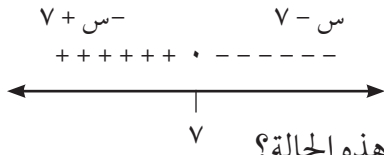
أحلّ المعادلة الآتية:  $|س - ٧| = ٧ - س$

$٧ - س = ٠$  ومنها  $س = ٧$

عندما  $س \leq ٧$  تكون  $س - ٧ = ٧ - س$ ، ما مجموعة الحل في هذه الحالة؟

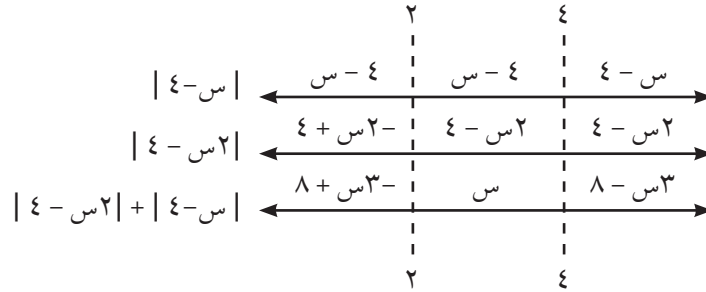
عندما  $س \geq ٧$  تكون  $س - ٧ = س - ٧$ ، ما مجموعة الحل في هذه الحالة؟

أتحقق أن مجموعة الحل هي  $س \in ]٧, \infty[$



**مثال ٤:**

أحلّ المعادلة الآتية:  $٤ = |س - ٢| + |س - ٤|$



عندما  $س \geq ٢$  تكون  $٤ = ٨ + س٣ - س$  ومنها  $س = \frac{٤}{٣}$  (أتحقق من ذلك)

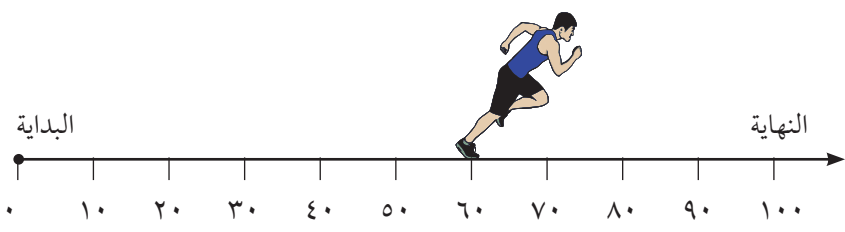
عندما  $٢ \leq س \leq ٤$  ينتج أن  $س = ٤$  (أتحقق من ذلك)

وعندما  $س \leq ٢$  تكون  $٤ = ٨ - س٣$  ومنها  $س = \frac{٤}{٣}$  أو  $س = ٤$  (أتحقق من ذلك)



**تمارين ومسائل ٣-٦:**

- ١) أحلّ المعادلات الآتية: أ)  $٨ = |س - ٦| - ٥$  ب)  $٥\sqrt{س^٢ + ٤س + ٤} - ١١ = ٤$
- ٢) إذا كان ٥ أمثال العدد أ يبعد عن العدد ٧ بمقدار ٨ وحدات ما قيمة أ؟
- ٣) أحلّ المعادلة الآتية:  $|س - ٤| = |س + ٢| - ٦$
- ٤) شارك أحد اللاعبين في سباق ١٠٠ م للجري. وفي لحظة ما كان ثلاثة أمثال بعده عن النقطة ٦٠ م يساوي بعده عن النقطة ٨٠ م. أجد كم متراً بقي له لإنهاء السباق في تلك اللحظة؟ (كم حلاً للمسألة)





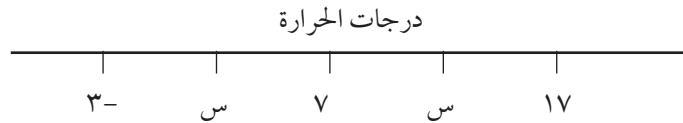
## نشاط ١:

بائع خضار متجول لا يزيد ربحه عن ٢٠ ديناراً في اليوم، ولا تقل خسارته عن ٢٠ ديناراً في اليوم، فإذا اشترى في أحد الأيام بضاعة قيمتها ١٠٠ دينار.  
 الحد الأعلى للمبلغ الذي سيقبضه بعد بيع البضاعة هو .....  
 الحد الأدنى للمبلغ الذي سيقبضه بعد بيع البضاعة هو .....  
 إذا فرضنا أن المبلغ الذي سيقبضه هو  $s$  أتتحقق أن  $80 \leq s \leq 120$   
 بطرح ١٠٠ من طرفي المتباينة ينتج أن .....  
 ما العلاقة بين  $|s - 100| \geq 20$  و  $s \geq 20 - 100$  و  $s \geq 100 + 20$

قاعدة: إذا كانت  $|s| > a$  (أ عدد موجب) فإن  $a > s > -a$   
 إذا كانت  $|s| < a$  (أ عدد موجب) فإن  $s < a$  أو  $s > -a$

## مثال ١:

رصدت درجات الحرارة لمدينة فلسطينية خلال فصل الشتاء، فوجد أن أصغر درجة حرارة كانت ٣ درجات مئوية تحت الصفر، وأكبر درجة حرارة كانت ١٧ مئوية. أكتب البيانات السابقة باستخدام رمز القيمة المطلقة.



## الحل:

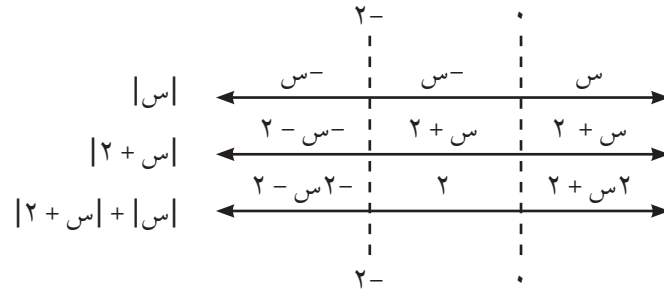
أفرض أن  $s$  هي درجة الحرارة فيكون  $-3 \leq s \leq 17$   
 أتذكر أنه إذا كان  $|s - a| \geq b$  (ب عدد موجب) فإن  $a - b \geq s \geq a + b$   
 بفرض أن  $a = 7$  و  $b = 10$  و  $a - b = -3$  و  $a + b = 17$  أتتحقق أن  $7 = a$  و  $10 = b$   
 إذن تصبح المتباينة باستخدام القيمة المطلقة  $|s - 7| \geq 10$

مثال ٢ :

أحلّ المتباينة الآتية:  $|س| + |س + ٢| \geq ٤$

الحل :

بعد إعادة تعريف  $|س|$  و  $|س + ٢|$  وتمثيلها على خط الأعداد ينتج:



• عندما  $س \geq ٢ -$  تكون  $٢ - س - ٢ - س \geq ٤$

ومن هنا ينتج أن  $س \leq ٣ -$  أي أن مجموعة الحل هي  $س \in [٢ - , ٣ -]$

• عندما  $٢ - \geq س \geq ٠$  تكون  $٤ \geq ٢$

وهذه العبارة صحيحة أي مجموعة الحل  $س \in [٠ , ٢ -]$

• عندما  $س \leq ٠$  تكون  $٢ + س + ٢ \geq ٤$

ومن هنا ينتج أن  $س \geq ١$  أي أن مجموعة الحل هي:  $س \in [١ , ٠]$

مجموعة الحل النهائية هي اتحاد المجموعات السابقة وهي  $[١ , ٣ -]$  (أتحقق من ذلك).

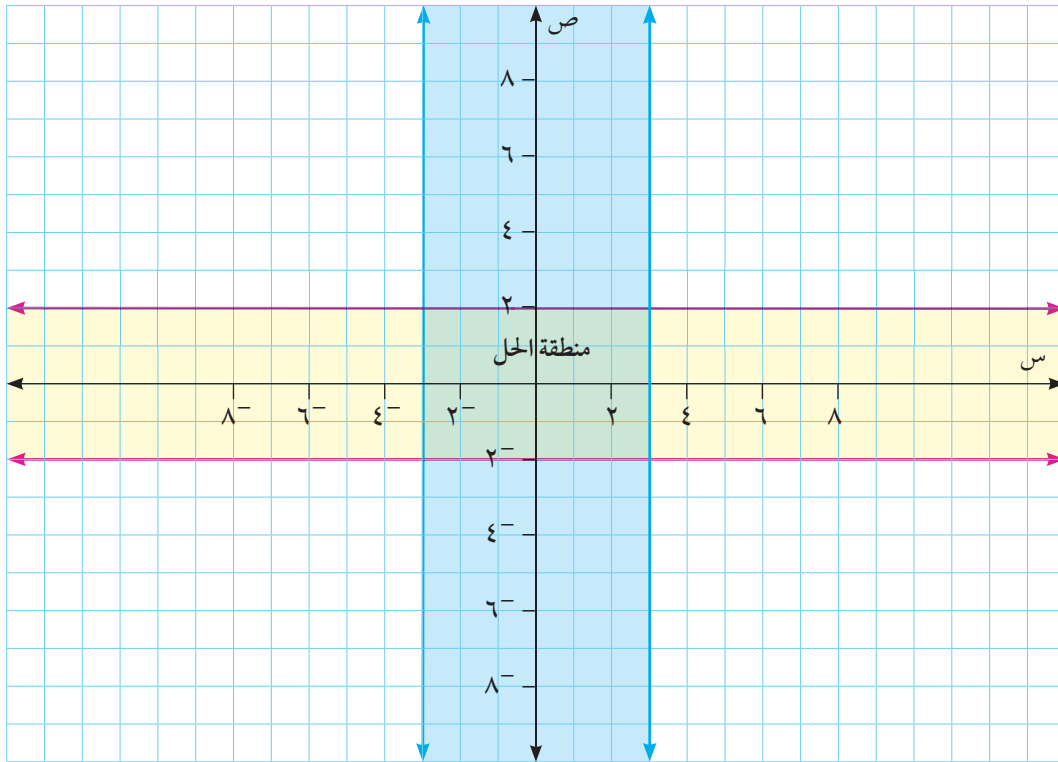


مثال ٣ :

تم قياس كتلتي شخصين في مركز للرياضة خلال شهر واحد، فإذا كان التغير في كتلة الأول لا يتعدى ٣ كغم، والتغير في كتلة الثاني لا يتعدى ٢ كغم.  
أكون متباينات خطية بمتغيرين، ثم أحلها، وأعطي أمثلةً توضح الحل.

الحل :

أفرض أن التغير في كتلة الأول  $s$  فيكون  $|s| \geq 3$  ومنها ينتج أن  $s \geq 3$  أو  $s \leq -3$   
أفرض أن التغير في كتلة الثاني  $v$  فيكون  $|v| \geq 2$  ومنها ينتج أن  $v \geq 2$  أو  $v \leq -2$   
ويمكن توضيح الحل بيانياً كما يأتي:



سؤال : ماذا تمثل النقطة (٢، ١) -



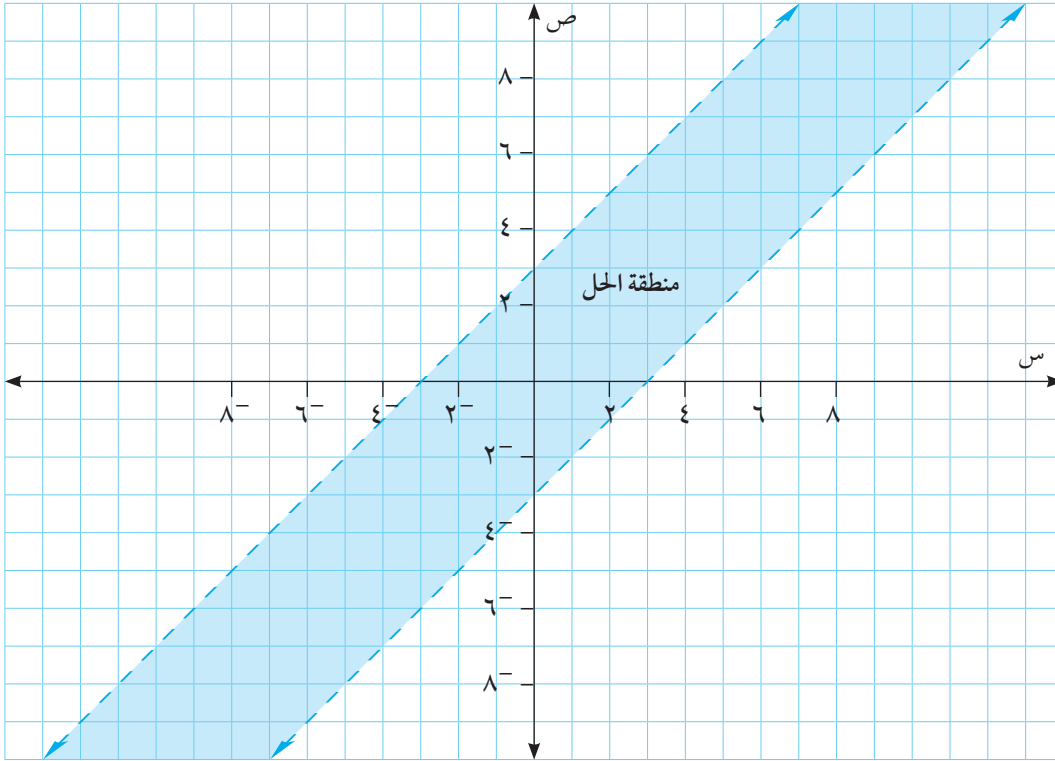
أحلّ المتباينة الآتية:  $|س - ص| > ٣$

أستخدم خصائص القيمة المطلقة في إعادة التعريف.

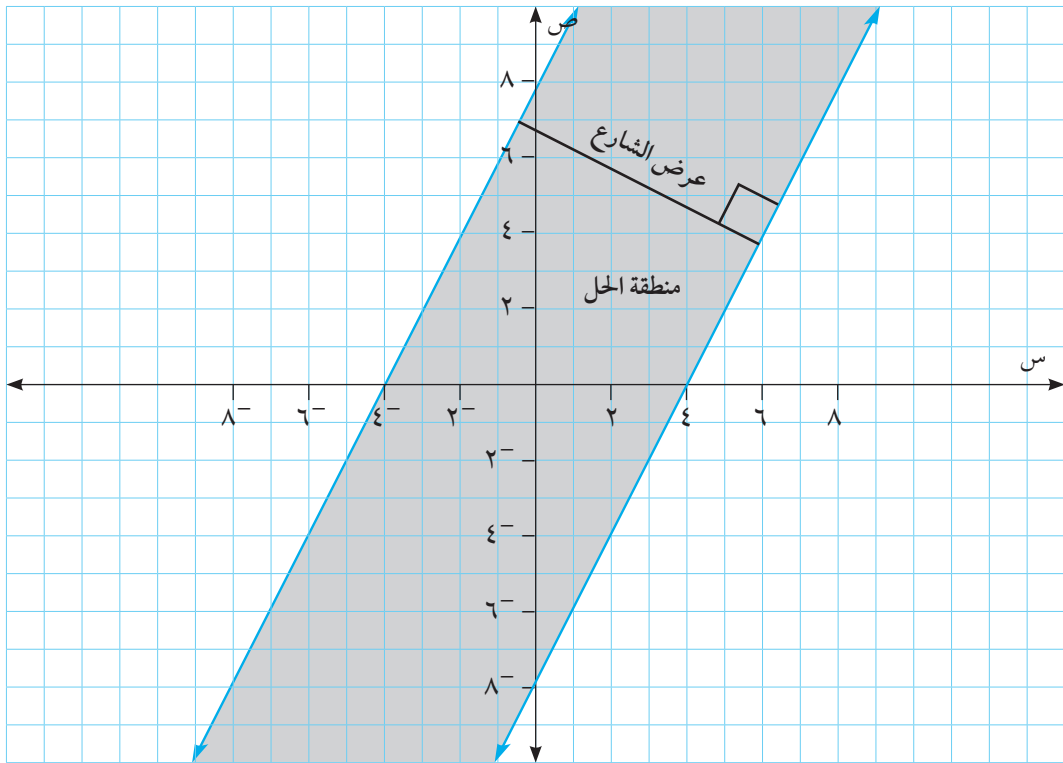
أجزئ المتباينة إلى جزأين، يمثل كل جزء متباينةً في متغيرين

أكتب المعادلة المرافقة لكل متباينة، وأمثلها بيانياً.

أتحقق أن مجموعة الحل يمكن تمثيلها كما يأتي:



- ١ أحل المتباينة الآتية:  $|١٢ + ٣س| \geq ٩$  وأمثلها بيانياً.
- ٢ أحل المتباينة الآتية:  $|٢ - ٣ص| < ١٢$  وأمثلها بيانياً.
- ٣ أحل المتباينة  $|س - ٢ص - ١| > ٥$
- ٤ أكتب المتباينة التي تمثل منطقة الحل الممثلة في الشكل الآتي مستخدماً رمز القيمة المطلقة:



(وإذا كانت هذه المنطقة تمثل شارعاً، أجد عرضه)

إرشاد: المسافة بين النقطة م ( $س_١, ص_١$ ) والمستقيم  $أس + ب ص + ج = ٠$  هي

$$ف = \frac{|أس_١ + ب ص_١ + ج|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$$

١ أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ ما قيم  $s$  التي تحقق المتباينة الآتية  $|\frac{s}{4} - 6| > 0$  ؟

(أ)  $[-8, 2, 6, 8]$  (ب)  $[-8, 2, 6, 8]$

(ج)  $[-8, 2, 6, 8]$  (د)  $[-8, 2, 6, 8]$

٢ أكتب ما يأتي باستخدام مفهوم القيمة المطلقة «المسافة بين ثلاثة أمثال  $s$  والعدد ٢».

(أ)  $|2s - 3|$  (ب)  $|3s - 2|$  (ج)  $|3s + 2|$  (د)  $|3s - 2|$

٣ عند حلّ نظام خطّي مكوّن من ٣ معادلات، كانت مجموعة الحل هي  $\{-3, 1, 6\}$ ، وكانت

إحدى المعادلات هي  $s - ص + ع = ٨$ . ما قيمة  $ع$  ؟

(أ) ٤ (ب) -٤ (ج)  $\frac{1}{3}$  (د) ١

٤ ما المعادلة التي يمكن أن يمثل بها النظام:  $ص = ٢ + س$ ،  $ص = س - ٢$  ؟

(أ)  $|ص| = |س| + ٢$  (ب)  $|س| = |ص| + ٢$

(ج)  $ص = |س - ٢|$  (د)  $٢ = |ص - س|$

٥ ما الزوج المرتب الذي يمثل حلاً للنظام الآتي:  $س^٢ - ص^٢ = ٥$ ،  $س + ص = ٥$  ؟

(أ)  $(-٣, ٢)$  (ب)  $(٢, ٣)$  (ج)  $(٣, ٢)$  (د)  $(٣, -٢)$

٦ ما العددان الموجبان اللذان مجموع مربعيهما يساوي ٥٢ والفرق بين مربعيهما يساوي ٢٠ ؟

(أ) ٤، ٦ (ب) ٨، ١٨ (ج) ٨، ٦ (د) ٨، ٤

٧ ما قيم  $s$  التي تحقق المعادلة الآتية:  $٨^{(s-٥)} = ١$  ؟

(أ) ٥ (ب) ٥ (ج)  $\frac{١٤}{٣}$  (د)  $\frac{١٤}{٣} -$

٨ ما قيم  $s$  التي تحقق المعادلة الآتية:  $٢ لو٣ س + لو٣ ٤ = ٦$  ؟

(أ)  $٤ \pm$  (ب) -٤ (ج) ٤ (د)  $\sqrt{٨}$

٩ إذا كان  $أ$ ،  $ب$  عددين موجبين،  $أ < ب$  وكان بعد  $أ$  عن  $ب$  يساوي ٣ وبعد  $أ$  عن معكوس  $ب$

يساوي ٧ فما قيم  $أ$ ،  $ب$  ؟

(أ) ٢، ٥ (ب) ٤، ٦ (ج) ٣، ٧ (د) ١، ٤

١٠ ما حل المعادلة  $٢ س^٢ - ٢ س = ٢$  ؟

(أ) ٢ (ب) صفر (ج) -١ (د) ١

- ٢ أجد قاعدة كثير الحدود من الدرجة الثانية والذي يمر منحناه بالنقاط (١، ١)، (١-، ٥-)، (٢، ١٠)
- ٣ أحلّ المتباينة  $5 \geq |س| + |س+١|$
- ٤ نافذة على شكل مستطيل طولها يزيد عن عرضها بمقدار متر واحد، فإذا كان طول قطرها يساوي  $\sqrt{٥}$  متراً. يراد تركيب ألومنيوم للنافذة بسعر المتر المربع ٦٠ ديناراً. أجد تكلفة الألومنيوم.
- ٥ عددان موجبان مجموع مربعيهما يساوي ٢٥، والفرق بين ثلاثة أمثال مربع الأول ومثلي مربع الثاني يساوي ٣٠. أجد العددين.
- ٦ أحلّ المعادلة الآتية:  $٢س^٢ - ٣س - ٢ = ٢س - ٢ = ٥$
- ٧ أحلّ المعادلة الآتية:  $٣ = (س - ٢)س + (س - ٨)س$
- ٨ تمت متابعة أسعار سلعتين على مدار عام، فإذا كان الفرق بين سعري السلعتين لا يتعدى ١٠ دنانير. أكوّن نظاماً رياضياً ثم أحله.

### فكرة رياضية

- ١ بناء برنامج حاسوبي: أقوم بتصميم برنامج باستخدام إحدى لغات البرمجة، لحل معادلات خطية في ٣ متغيرات.
- ٢ تطبيقات عملية: أبحث عن تطبيقات عملية علمية واقتصادية....، تتعلق بالمعادلات وأحلها، ثم أعرضها على زملائي وأشارهم في حلها.
- ٣ حساب الكميات: كيف يمكن إيجاد تكلفة الباطون اللازم لبناء البئر، إذا علمت أن سمك الباطون من الجوانب والعقدة يساوي ٢٠سم، وسمك الباطون من القاعدة يساوي ٤٠ سم. علماً بأن سعر المتر المكعب من الباطون يساوي ٦٠ ديناراً. (الأبعاد س و ص و ع من الداخل). في نشاط ٣ بند (٢-١).
- ٤ ظواهر... معادلات... وحلول: أتابع ظاهرة معينة مثل درجة الحرارة، أو سرعة سيارات، أو كتل، أو أطوال بعض الأشخاص ثم أكوّن معادلات لهذه الظواهر مع وصف حلها.

### روابط إلكترونية

- <https://www.desmos.com/calculator>
- <http://www.naja7math.com/graph/>
- <https://www.mathsisfun.com/algebra/inequality-solving.html>



## لجنة المناهج الوزارية:

|                |                 |               |
|----------------|-----------------|---------------|
| د. شهناز الفار | أ. ثروت زيد     | د. صبري صيدم  |
| د. سمية نخالة  | أ. عزام أبو بكر | د. بصري صالح  |
| م. جهاد دريدي  | أ. علي مناصرة   | م. فواز مجاهد |

## اللجنة الوطنية لوثيقة الرياضيات:

|                   |                 |                       |
|-------------------|-----------------|-----------------------|
| أ. حنان أبو سكران | د. عطا أبو هاني | أ. ثروت زيد           |
| أ. كوثر عطية      | د. سعيد عساف    | د. محمد صالح (منسقاً) |
| د. وجيه ضاهر      | د. محمد مطر     | د. معين جبر           |
| أ. فتحي أبو عودة  | د. علا الخليلي  | د. علي عبد المحسن     |
| د. سمية النخالة   | د. شهناز الفار  | د. تحسين المغربي      |
| أ. أحمد سياعرة    | د. علي نصار     | د. عادل فوارعة        |
| أ. قيس شبانة      | د. أيمن الأشقر  | أ. وهيب جبر           |
| أ. مبارك مبارك    | أ. ارواح كرم    | د. عبد الكريم ناجي    |

## المشاركون في ورشات عمل كتاب الرياضيات الحادي عشر العلمي والصناعي:

|               |                 |              |
|---------------|-----------------|--------------|
| محمد فايز     | سامي بدر        | د. محمد صالح |
| مراد غنيم     | سمير درويش      | أحمد أمين    |
| مصطفى عفانة   | سهيل شبير       | أرواح كرم    |
| منى الطهراوي  | سهيلة بدر       | ابتسام اسليم |
| موسى حراحشة   | عبد الكريم صالح | باسم المدهون |
| مي عصايرة     | عوني الفقيه     | حنين شرف     |
| هناء أبو عامر | فلاح الترك      | رأفت عمرو    |
| وائل العبيات  | محمد الفرا      | رائدة عويص   |
| وفاء موسى     | محمد حمدان      | ريم جابر     |